תרגיל 10

1. בהנחה ש-$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2$, הוכיחו כי $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\sqrt{5}$.

פתרון. נגדיר שלושה ווקטורים:

$$u=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}\cos\gamma\\ \sin\gamma\end{pmatrix}.$$

אז $|u|=|v|=|w|=1$, ולפי אי-שוויון המשולש $|u+v+w|\le|u|+|v|+|w|=3$. אבל

$$u+v+w=\begin{pmatrix}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\\ \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\end{pmatrix},$$

ולכן $|\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma|\le\sqrt{3^2-2^2}\le\sqrt{5}$.

2. משושה שווה-צלעות ABCDEF קמור (לאו דווקא משוכלל) חסום במשולש משוכלל (על כל צלע של משולש נמצאים שני קודקודים של משושה). הראו כי AD, BE, CF נפגשים בנקודה אחת.

פתרון. נניח לה"כ שהצלעות של המשולש המשוכלל הם המשכי AB, CD, EF (אחרת ניתן לסובב סימונים).
קל לראות את הזהויות הבאות בווקטורים:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=0$$
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=0$$

(הזהות הראשונה ברורה, השנייה מכיוון שהווקטורים שווי-אורך ויוצרים 120° זה אם זה.) לכן מתקבל גם $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FA}=0$. אבל ווקטורים אלה שווים באורכיהם, מכאן גם הזוויות בינם שווים זה לזה.
נתבונן בחוצה זווית של הזווית A של המשושה. השיקוף ביחס לחוצה זווית זה מעביר את הווקטור AB ל-AF, ולכן גם את הווקטור FE ל-BC (הרי הזוויות שהם יוצרים אם הווקטורים הקודמים זהים), באופן דומה גם הווקטור CD סימטרי לווקטור ED, לכן ביחס לחוצה זווית זה B סימטרי ל-F, ובנוסף גם E סימטרי ל-C, והנקודה D סימטרית לעצמה כלומר נמצאת על חוצה הזווית. לכן BE סימטרי ל-CF ביחס ל-AD.

3. האם אפשר לסמן מספר סופי של נקודות במישור, כך שבמרחק 1 מכל נקודה מסומנת נמצאות בדיוק 4 נקודות מסומנות?

תשובה. כן.
פתרון. נסמן על המישור נקודה שנקרא לה 0, ובנוסף נצייר ממנה ווקטור v_1 שאורכו 1, ונסמן גם את הקצה השני של הווקטור.
כעת נבחר ווקטור נוסף v_2 כך ש-$|v_2|=1$ אבל $|v_2\pm v_1|\ne1$ לכל בחירה של סימן, ונוסיף ווקטור v_2 לשתי הנקודות המסומנות, ונסמן את התוצאות שיוצאות. כעת יש בציור מעוין, ולכל נקודה מסומנת יש בדיוק שתי נקודות מסומנות במרחק 1 ממנה.

נבחר ווקטור נוסף v_3 עבורו $|v_3|=1$ אבל לכל בחירה של סימנים $|v_3 \pm v_1 \pm v_2| \neq 1$ וגם $|v_3 \pm v_i| \neq 1$ עבור $i=1,2$ (לא קשה לראות שזה אפשרי). נוסיף ווקטור v_3 לכל קודקודי המעוין המסומנים ונקבל עוד 4 נוקדות (התמונה שיוצאות מזכירה ציורים של קובייה על דף נייר).
לבסוף\ נבחר ווקטור v_4 עבורו $|v_4|=1$ שלא יוצר שום ווקטורים באורך 1 כאשר מחברים אותו לסכומים עם סימנים של ווקטורים קודמים, ונוסיף אותו לכל 8 הנקודות שמסומנות כבר, ונסמן את תוצאות החיבור. נקבל 16 נקודות מסומנות שמקיימות את הדרישה.

4. מצולע משוכלל $A_1A_2...A_n$ חסום במעגל שרדיוסו R. הראו שלכל נקודה P במישור,
$$PA_1 + PA_2 + ... + PA_n \geq nR.$$
פתרון. נסמן ווקטורי יחידה ממרכז המעגל לכיוון A_i באמצעות v_i.
נניח גם שכל נקודה מייצגת גם ווקטור, כאשר ראשית הצירים במרכז המעגל.
$$PA_i = |A_i - P| \geq \langle A_i - P\ ,\ v_i \rangle = \langle A_i, v_i \rangle - \langle P, v_i \rangle = R - \langle P, v_i \rangle.$$
מש"ל.

הערה. ניתן גם לראות אותו פתרון בצורה גיאומטרית. מעביר בנקודה A_i ישר שמאונך לווקטור A_i. מרחק מ-P ל-A_i גדול או שווה ממרחק (מכוון) מ-P לישר. אבל סכום של מרחקים מכוונים אלה קבוע, ושווה ל-nR.
דרך נוספת לנסח את אותו הפתרון היא לחשב גרדיינט. הגרדיינט במרכז המצולע מתאפס עקב סימטריה, אבל הפונקציה של סכומי מרחקים היא פונקציה קמורה ונמצאת מעל למשיק. אבל המישור המשחר במרכז הוא אופקי.

לכן $$\sum_{i=1}^{n} PA_i \geq \sum_{i=1}^{n} \left(R - \langle P, v_i \rangle \right) = nR - \left\langle P, \sum_{i=1}^{n} v_i \right\rangle = nR - \langle P, 0 \rangle = nR$$

5. א. הראו כי $|a|+|b|+|c|+|a+b+c| \geq |a+b|+|a+c|+|b+c|$, לכל 3 ווקטורים a,b,c במישור.
ב. הראו שלכל 5 נקודות במישור, A, B, C, P, Q מתקיים אי-שוויון:
$$AB + BC + CA + PQ \leq AP + BP + CP + AQ + BQ + CQ.$$
ג. האם שני הסעיפים הקודמים נכונים רק במישור, או גם במרחב תלת-מימדי?

פתרון. אנחנו נראה כי כל אי-שוויון מסוג זה (לגבי אורכים של ווקטורים, או אורכים של קטעים שמחברים נקודות במישור), מספיק להראות אותו למקרה של ישר הממשי, ואז הוא ינבע גם למישור.
יהי θ זווית כלשהי. נגדיר לכל ווקטור v וקטור v_θ, שמתקבל כאשר מטילים את הווקטור v לישר שהשיפוע שלו שווה ל-θ. אז האורך של v_θ זו פונקציה של θ (כמובן לא משנה המיקום של הישר, רק השיפוע שלו). באופן דומה, אם XY מסמן את אורך הקטע שמחבר נקודות X ו-Y, נסמן ב-XY_θ את אורך ההיטל של הקטע לישר, שהשיפוע

שלו θ. אז לכל ווקטור ניתן להגדיר $\int_0^{2\pi}|v_\theta|d\theta$. קל לראות שהאינטגרל הזה צריך להיות אותו דבר עבור שני ווקטורים באותו אורך, אפילו אם הם בכיוונים שונים. בנוסף, אם מגדילים ווקטור פי k אז כל ההטלות מוכפלות ב-k. לכן $\int_0^{2\pi}|v_\theta|d\theta=\kappa\cdot|v|$, כאשר κ הוא קבוע אולמי. ניתן גם לחשב את הקבוע הזה, אבל אין צורך.

נניח כי הוכחנו $|a|+|b|+|c|+|a+b+c|\geq|a+b|+|a+c|+|b+c|$ עבור מספרים ממשיים, וכעת מנסים להוכיח עבור ווקטורים. אז לכל θ,

$$|a_\theta|+|b_\theta|+|c_\theta|+|(a+b+c)_\theta|\geq|(a+b)_\theta|+|(a+c)_\theta|+|(b+c)_\theta|.$$

נחשב את האינטגרל בשני האגפים, ונקבל את מש"ל עבור הווקטורים.

שיקול דומה ניתן לעשות גם למרחב תלת-ממדי (או אפילו n-ממדי). כאן צריך כל פעם לבחור ווקטור יחידה Θ, וכל פעם לחשב מכפלה סקלרית עם הווקטור. לאחר מכן מחשבים אינטגרל על פני קליפה כדורית עם רדיוס 1, והאינטגרל הוא קבוע עולמי כפול אורך הווקטור שמטילים אותו.

כעת נעבור לסעיפים א' ו-ב', ובכל פעם מספיק שנוכיח אי-שוויון עבור מספרים ממשיים.

א. צריך להוכיח כי $|a|+|b|+|c|+|a+b+c|\geq|a+b|+|a+c|+|b+c|$.

ישנם שתי אפשרויות: או שכל המספרים הם בעלי אותו סימן, או ששניים בסימן אחד ואחד בסימן הפוך. כמובן יש מקרה שיש מספר אפסי, אבל הוא מקרה קצה של המקרים האחרים. ניתן להפוך סימן לשלושת המספרים a,b,c בו-זמנית, וכל המספרים יישארו אותו דבר. לכן בעצם מספיק לה"כ לבדוק שני מקרים: $a,b,c\geq 0$ ו- $a,b\geq 0\geq c$.

מקרה ראשון: צריך הראות כי $a+b+c+a+b+c\geq a+b+a+c+b+c$ וזה ברור לקיפוד.

מקרה שני: נסמן $k=-c$, שזה מספר אי-שלילי, ואז צריך להראות כי

$$a+b+k+|a+b-k|\geq a+b+|a-k|+|b-k|.$$

$$k+|a+b-k|\geq|a-k|+|b-k|.$$

לה"כ $a\leq b$, לכן יש 4 אפשרויות לנוסחה זאת: k יכול להשתייך לקטע $[0,a]$ או לקטע $[a,b]$ או לקטע $[b,a+b]$ או לקטע $(a+b,+\infty)$.

עבור $k\in[0,a]$ מקבלים $k+a+b-k\geq a-k+b-k$, וזה ברור.

עבור $k\in[a,b]$ מקבלים $k+a+b-k\geq k-a+b-k=b-a$, וגם זה ברור.

עבור $k\in[b,a+b]$ מקבלים $k+a+b-k\geq k-a+k-b$,

כלומר $a+b\geq 2k-a-b$, כלומר $a+b\geq k$, וגם זה ברור.

עבור $k\in(a+b,+\infty)$ מקבלים $k+k-a-b\geq k-a+k-b$, וגם זה ברור.

הערה. סעיף זה הופיע באולימפיאדה של ברה"מ.

ב. סעיף זה הופיע באולימפיאדה של יפן, אבל אנחנו נוכיח טענה יותר, דומה לשאלה שהופיעה פעם באולימפיאדה של אירן.

בהינתן נקודות $A_1, A_2, ..., A_k$ ונקודות $P_1, P_2, ..., P_m$, נוכיח כי:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\left|A_iP_j\right| \geq \sum\sum_{1\leq i<j\leq k}\left|A_iA_j\right| + \sum\sum_{1\leq i<j\leq m}\left|P_iP_j\right|.$$

עבור $m=2$, $k=3$ נקבל בדיוק את מה שרצינו להוכיח. עבור $k=m=2$ מקבלים גם טענה מעניינת: סכום אלכסוני המרובע אינו גדול מסכום צלעותיו.

ובכן, כמו שהסברנו בהתחלה, מספיק להראות עבור $m+k$ מספרים ממשיים כלשהם כי

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\left|a_i-p_j\right| \geq \sum\sum_{1\leq i<j\leq k}\left|a_i-a_j\right| + \sum\sum_{1\leq i<j\leq m}\left|p_i-p_j\right|.$$

אי-השוויון הומוגני כלומר אם נעשה הומותטיה עם מקדם כלשהו אי-השוויון ימשיך להיות נכון או לא נכון. אותו דבר לגבי הזזות: עם נוסיף קבוע לכל המספרים, אי-השוויון ימשיך להיות נכון או לא נכון. לכן מספיק לוודא שאי-שוויון עובד כאשר כל המספרים נמצאים בתחום $[0,1]$. נשים לב שהפונקציה

$$f(a_1,...,a_k,p_1,...,p_m)=\sum\sum_{1\leq i<j\leq k}\left|a_i-a_j\right| + \sum\sum_{1\leq i<j\leq m}\left|p_i-p_j\right| - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\left|a_i-p_j\right|$$

משתנה באופן ליניארי, אם נזיז a_i כלשהו בתחום שבו הוא לא יחלוף על אף אחד מבין המספרים האחרים. פונקציה ליניארית מקבלת ערך מרבי באחד מקצוות הקטע, לכן מספיק להוכיח את אי-השוויון כאשר a_i מתלכד אם a_j כלשהו, או אם p_j כלשהו או אם 0 או אם 1.

אם שניים או יותר מבין המספרים $a_1,...,a_k,p_1,...,p_m$ שווים לאותו מספר x, אז אפשר להזיז אותם יחד כל עוד שהערך x לא יחלוף על פני ערכים אחרים שיש מבין המספרים הנתונים $a_1,...,a_k,p_1,...,p_m$, וגם אז ערך של f ישתנה באופן ליניארי, לכן המקסימום יתקבל בקצוות התחום המותר ל-x. לכן כל מספר x שיש $a_1,...,a_k,p_1,...,p_m$ שהוא בקטע הפתוח $(0,1)$ ניתן לה"כ להעביר ביחד עם כל המספרים האחרים ששווים ל-x למספר נוסף מהרשימה שקודם היה שונה מ-x, או לאחד מבין קצוות התחום: 0 או 1. לכן מספיק להגיע למצב, שבו כל אחד מבין המספרים הוא 0 או 1.

נניח כי מבין $a_1,...,a_k$ יש k_0 ערכים ששווים ל-0 וכל k_1 הערכים שווים ל-1, כאשר $k_0+k_1=k$. נניח כי מבין $p_1,...,p_m$ יש m_0 ערכים ששווים ל-0 וכל m_1 הערכים שווים ל-1, כאשר $m_0+m_1=m$. אז צריך להוכיח בעצם כי

$$k_1m_0+k_0m_1 \geq k_0k_1+m_0m_1$$
$$0 \geq (k_0-m_0)(k_1-m_1).$$

זה מקרה פרטי של השאלה, אבל זה מקרה פרטי יחיד שצריך להוכיח. ובכן, השאלה היא האם עבור m,k נתונים לכל פירוק שלהם לסכום שני מספרים שלמים אי-שליליים $k_0+k_1=k$, $m_0+m_1=m$ מתקיים שהסדר היחסי של k_0,m_0 הפוך לסדר היחסי של k_1,m_1. זה כמובן נכון עבור $k=m$: אם $k_0>m_0$, אז $k_1<m_1$, וכאשר $k_0=m_0$.

קל לראות שזה גם נכון כאשר $k=m\pm1$.

אבל כאשר $|k-m|\geq 2$ קל לראות שזה לא תמיד נכון.

כמובן, במקרה הפרטי שלנו זה נכון.

6. תיכונים מחלקים את המשולש ל-6 משולשים קטנים יותר. הראו, שמרכזי המעגלים החוסמים של 6 המשולשים הקטנים נמצאים על מעגל אחד.

פתרון. נסמן את קודקודי המשולש A, B, C, את אמצע הצלעות ממול A', B', C', ואת נקודת מפגש התיכונים ב-M. נסמן את מרכזי המעגלים החוסמים של המשולשים AMB', CMB', CMA', BMA', BMC', AMC' ב-U, V, W, X, Y, Z.
אנחנו נזדקק לשתי טענות עזר בשביל הפיתרון:

טענה 1. מהווקטורים $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ ניתן להרכיב משולש (כאשר מזיזים את הווקטורים במקביל, בלי לסובב.

טענה 2. נניח כי כל שתי צלעות של משושה $OPQRST$ מקבילות (לאו דווקא משווהקמור, שיכול אפילו לחתוך את עצמו), ובנוסף שמבין האלכסונים OR, PS, QT אף שניים לא מקבילים. אז המשושה חסום במעגל, אם ורק אם $QT = PS = OR$.

אנחנו נוכיח את הטענות בסוף; קודם נפתור את השאלה באמצעות הטענות.
הנקודות U, V נמצאות על האנך האמצעי של הקטע MB', והנקודות X, Y על האנך האמצעי של BM. לכן שתי צלעות נגדיות של משושה $UVWXYZ$ מקבילות, וכך אפשר להוכיח גם לכל זוג אחר של צלעות מקבילות. לכן $UVWXYZ$ מקיים את התנאי הראשון של טענה 2. לגבי התנאי השני פחות ברור.
כלומר לא מיד ברור, האם אורכי XU, YV, ZW שווים (אבל צריך להוכיח שכן). מה שברור, בעקבות האנכים האמצעים שכב ציינו, זה שההיטל של $\overrightarrow{XU}$ ושל $\overrightarrow{YV}$ על התיכון BB' זהה ושווה ל-$\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$. כמו כן, ההיטל של $\overrightarrow{YV}$ ושל $\overrightarrow{ZW}$ על CC' זהה ושווה ל-$\frac{1}{2}\overrightarrow{C'C}$, וטענה דומה עבור ההיטלים של $\overrightarrow{ZW}$ ושל $\overrightarrow{UX}$ ל-AA'.
ניצור (באמצעות טענה 1) משולש $A_0B_0C_0$ כך ש-$\overrightarrow{A_0B_0} = \overrightarrow{CC'}$, וכן $\overrightarrow{B_0C_0} = \overrightarrow{AA'}$, ואז גם $\overrightarrow{C_0A_0} = \overrightarrow{BB'}$. את מרכז המעגל החוסם של $A_0B_0C_0$ נסמן G. נשים לב כי ההיטלים של $\overrightarrow{YV}$ לצלעות A_0B_0 ו-A_0C_0 הם שוות בהתאמה להיטלים לאותן הצלעות של $\overrightarrow{GA_0}$, ולכן $\overrightarrow{GA_0} = \overrightarrow{YV}$. באופן דומה $\overrightarrow{GB_0} = \overrightarrow{WZ}$, וכן $\overrightarrow{GC_0} = \overrightarrow{UX}$. אבל G מרכז המעגל החוסם של $A_0B_0C_0$, לכן $\left|\overrightarrow{GA_0}\right| = \left|\overrightarrow{GB_0}\right| = \left|\overrightarrow{GC_0}\right|$, ולכן אלכסוני המשושה שווים, ולכן המשושה חסום (כמובן צריך הסבר נוסף כאשר שניים מהתיכונים מאונכים, או מעבר גבולי, או עידון של אותו הטיעון). ובכן נשאר להוכיח את טענות העזר.

הוכחת טענה 1. נסמן $u = \overrightarrow{BC}$, $v = \overrightarrow{CA}$, $w = \overrightarrow{AB}$. אז

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{w-v}{2}\ ,\ \overrightarrow{BB'} = \frac{u-w}{2}\ ,\ \overrightarrow{CC'} = \frac{v-u}{2},$$

וסכומם שווה ל-0. מש"ל.

הוכחת טענה 2. אם המשושה חסום במעגל, והצלעות הנגדיות מקבילות, אז כל זוג צלעות מקבילות בהכרח יוצר טרפז שווה שוקיים, והאלכסונים בטרפז שווה-שוקיים שווים.

גם ההפך נכון. אם האלכסונים שווים, והצלעות מקבילות בזוגות, אז כל זוג צלעות מקבילות יוצר טרפז שווה-שוקיים. ניקח את המשולש שנוצר על ידי האלכסונים. נקודת מפגש חוצי הזוויות שלו נמצאת על האנך האמצעי המשותף של שני הבסיסים של כל טרפז. לכן היא נמצאת במרחק שווה מכל שני קודקודים עוקבים של המשושה, לכן היא נמצאת במרחק שווה מכל קודקודי המשושה, ולכן המשושה חסום.