תרגיל 1

1. זוג מספרים k,n יקרא מוצלח, אם אפשר למחוק מספר ספרות מצד ימין של הרישום העשרוני של 2^n ולקבל 5^k. למשל $2,8$ זה זוג מוצלח: אפשר למחוק 6 מצד ימין של $256=2^8$ ולקבל $25=5^2$. הראו שאם k,n מהווים זוג מוצלח, אז ניתן למחוק מספר ספרות מצד ימין של 5^n ולקבל 2^k-1.

2. נתון $\alpha>0$ מספר ממשי. הוכיחו כי לכל N חיובי שלם, קיימים מספרים שלמים m,n כך ש- $0<n\le N$ ומתקיים $\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{nN}$.

3. צפרדע נקודתית בעלת רגליים מלוכלכות מקפצת על מעגל בקפיצות קבועות. לאחר זמן מה (אחרי שלצפרדע נמאס לקפוץ) מודדים את אורכי כל הקשתות, הנמצאות בין עקבות סמוכות של הצפרדע. כמה מרחקים שונים עשויים להתקבל במדידות?

4. מבין הספרות הראשונות (השמאליות ביותר) ברישום העשרוני של המספרים $1,2,2^2,2^3,...,2^{1000000}$ מה מופיע יותר פעמים: 3 או 4?

5. קבוצת נקודות במישור נקראת סבירה, אם קיים פולינום בשני משתנים $p(x,y)$ שאינו 0 זהותית, שמתאפס בכל הנקודות של הקבוצה (יכול להתאפס גם בנקודות אחרות). קבוצה שהיא לא סבירה, כלומר כזאת שכל פולינום שמתאפס בכל הנקודות שלה חייב להתאפס בכל הנקודות של המישור, תקרא קבוצה פרועה. נסמן ב- d_n את כמות הספרות ברישום העשרוני של 4^n, וב- e_n את כמות הספרות של 5^n.

א. האם קבוצת הנקודות (d_n,e_n) לכל n טבעי, היא סבירה או פרועה?

ב. האם קבוצת הנקודות $(d_n,n-e_n)$ לכל n טבעי, היא סבירה או פרועה?

6*. יהא $n\ge 3$ מספר שלם, ונתבונן במעגל שעליו ממוקמות $n+1$ נקודות במרווחים שווים. נתבונן בכל הדרכים לסמן את הנקודות באמצעות המספרים $0,1,...,n$ כך שכל מספר מופיע בדיוק פעם אחת. שני סימונים נחשבים זהים, אם אחד מתקבל מהשני על ידי סיבוב של המעגל. סימון נקרא **יפהפה** אם לכל ארבעה מספרים $a<b<c<d$ המקיימים $a+d=b+c$, המיתר המחבר את הנקודות המסומנות a ו- d לא נחתך עם המיתר המחבר את הנקודות המסומנות b ו- c.

נסמן ב- M את מספר הסימונים היפהפיים, ונסמן ב- N את מספר הזוגות הסדורים של שלמים חיוביים (x,y) המקיימים $x+y\le n$ וכן $\gcd(x,y)=1$. הוכח/י כי $M=N+1$.