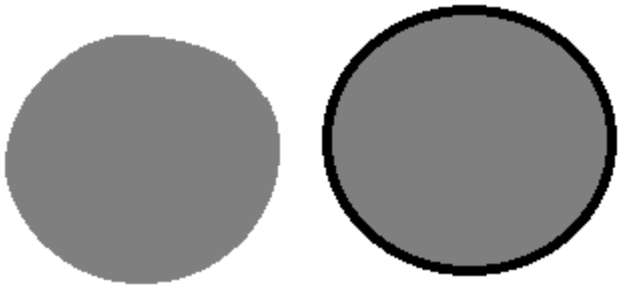
<u>משטחים:</u>

<u>הגדרה:</u> משטח הוא צורה, שבסביבת כל נק' שלה נראית כמו מישור. אנחנו נדבר על משטחים **עם שפה**, כלומר כאלה שחלק מהנק' שלהן נמצאות "בקצה" ובסביבתן המשטח נראה כמו חצי מישור.

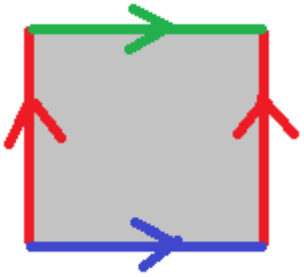
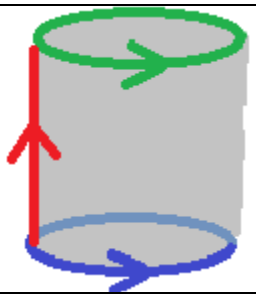
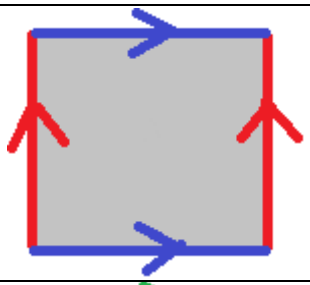
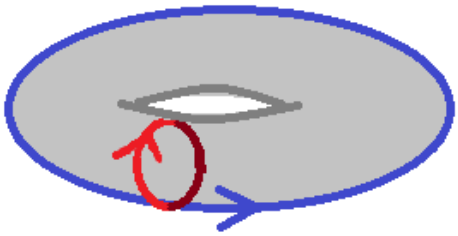
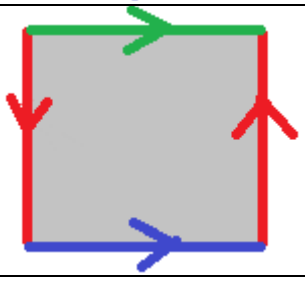
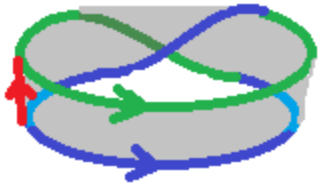
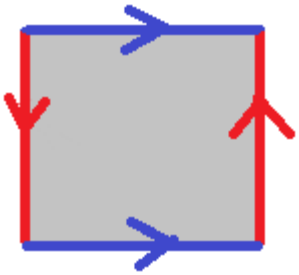
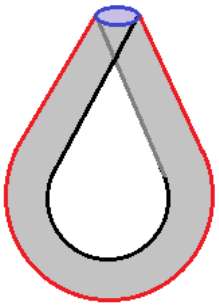
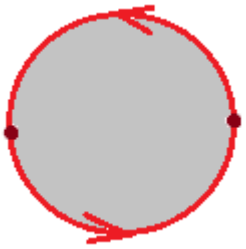
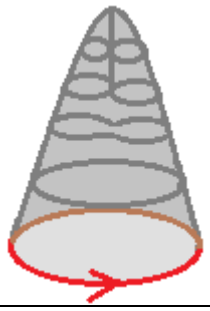
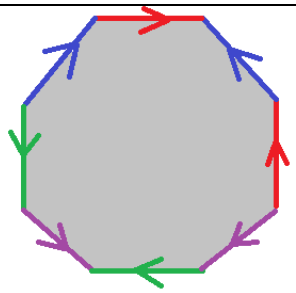
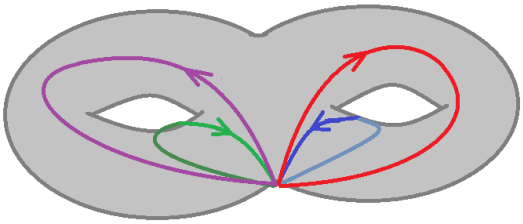
כמו כן, המשטחים שלנו יהיו **קומפקטיים**. למי שעוד לא עשה קורס בטופולוגיה, אז קודם כל שיעשה, ודבר שני זה אומר שאם צועדים בכיוון כלשהו על המשטח תמיד מגיעים לנק' כלשהי בסוף. לדוגמא: העיגול הראשון, שמכיל את הנק' על היקפו, הוא קומפקטי, אבל השני לא.



<u>דוגמאות:</u>

גליל, טורוס, טבעת מוביוס, מישור פרוייקטיבי, בקבוק קליין, ספרה, ספרה עם 7 ידיות...

לכל דוגמא אפשר להוסיף חורים ולקבל עוד דוגמאות.

גליל		
טורוס- $\mathbb{T}$		
טבעת מוביוס- $\mathbb{M}$		
בקבוק קליין- $\mathbb{K}$		
מישור פרויקטיבי $\mathbb{P}^2$		
משטח מגנוס 2: Σ_2		

דרכים ליצור משטחים חדשים ממשטחים קיימים:

אם יש לנו כבר משטח S, אנחנו יכולים לבצע עליו מספר פעולות על מנת לקבל משטחים חדשים:

1. לעשות בו חור, שזה אומר להוציא ממנו דיסק פתוח.
2. להוסיף לו ידית.
3. להוסיף לו cross-cap.



סכום קשיר:

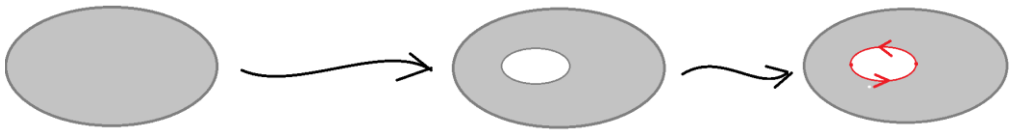
אם S,S' שני משטחים, נגדיר את הסכום הקשיר שלהם: 'S#S כך: נוציא מכל אחד מהמשטחים דיסק, ונדביק אותם לאורך שפת הדיסקים שהסרנו. דוגמא:

$$\Sigma_g \# \Sigma_h = \Sigma_{g+h} \ , \ \mathbb{P}^1 \# \mathbb{P}^1 = \mathbb{K} \ ...$$

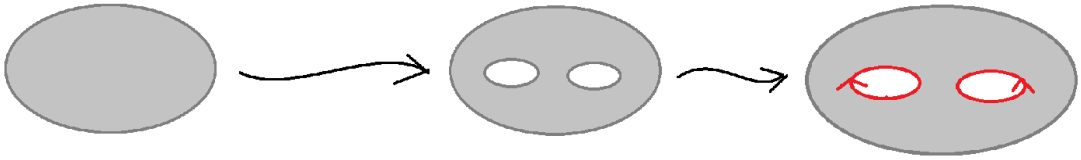
הערה. לא משנה איפה קודחים חור, כי אפשר "לסחוב" אותו לאורך המשטח (זה טופולוגיה!)

את הפעולות של הוספת ידיות ו-cross-cap ניתן לתאר בעזרת יצירת חורים והדבקות, באופן הבא:

הוספת cross-cap:



והוספת ידית:

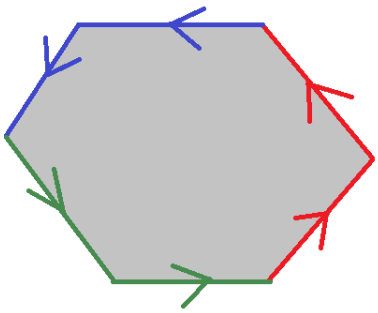


<u>הטענה המרכזית</u>: כל משטח מתקבל מספרה דו-ממדית ע"י סדרה סופית של הוספת ידיות, cross-caps ויצירת חורים.

<u>ניסוח שקול</u>: כל משטח מתקבל מאחת מ-2 סדרות המשטחים הבאות ע"י יצירת חורים: Σ_g ל-$g \geq 0$ ו- N_g ל-$g > 0$, ע"י יצירת חורים. את ה-Σ_g אנחנו כבר מכירים. ה-N_g הם דומים, רק שבניגוד ל-Σ_g אינם אוריינטביליים.

(משטח נקרא **לא אוריינטבילי** אם ניתן לגרור עליו משולש קטן ככה שהמשולש יתהפך. למשל טבעת מוביוס לא אוריינטבילית כי אפשר לגרור משולש לאורך הטבעת ובסוף המשולש יהפוך צד.)

N_g נראה כך: לוקחים מצולע בעל 2g צלעות, ומדביקים זוגות עוקבים של צלעות באותו כיוון. לדוגמא:

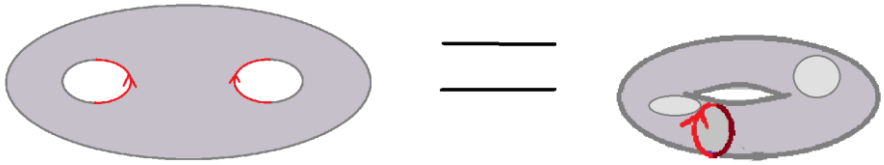


באופן שקול, N_g Σ_g הוא ספרה עם g ידיות, ו- N_g ספרה עם g cross-caps.

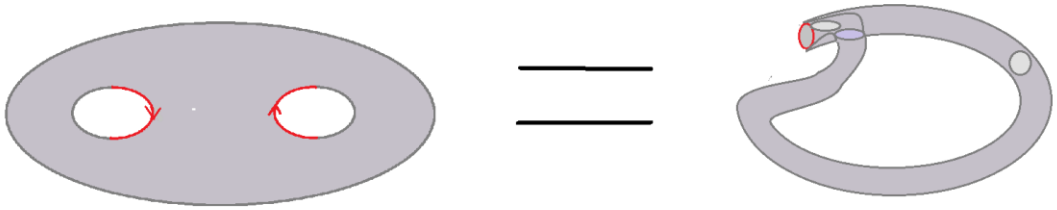
בשביל לקבל את הטענה המרכזית, צריך לעשות תרגיל:

1. הדבקה של דיסק ושל טבעת מוביוס לאורך השפה זה מישור פרויקטיבי.

2. יצירת 2 חורים והדבקת חצאי השפות באותו כיוון יוצר טורוס עם 2 חורים:



3. יצירת 2 חורים והדבקת חצאי השפות בכיוונים מנוגדים זה כמו יצירת בקבוק קליין עם 2 חורים:



4. $\mathbb{P}^1 \# \mathbb{P}^1 \# \mathbb{P}^1 = \mathbb{K} \# \mathbb{P}^1 = \mathbb{T}^1 \# \mathbb{P}^1$

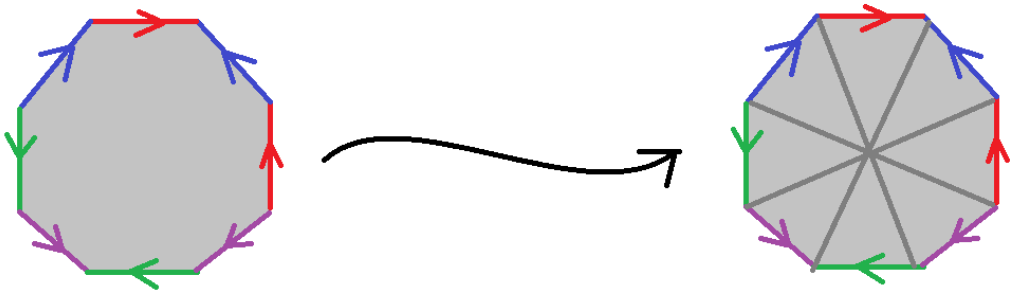
את התרגילים האלה אני מציע לכל מי שקורא את זה לשבת על הישבן ולבצע, זה בהחלט שווה את זה!

עכשיו נניח שאני מאמין לך שבאמת ישבת ועשית:

במתנה נקבל את הטענה המרכזית!

<u>הוכחת הטענה המרכזית:</u>

נניח ש- M משטח קומפקטי כלשהו. **שילוש** של המשטח הוא חלוקה של כל המשטח למשולשים, שמודבקים לאורך הצלעות שלהם. לדוגמא:



כעת, זוהי טענה ברורה אינטואיטיבית, וקשה להוכחה, (ולכן נקבל אותה כעובדה) שלכל משטח יש שילוש. נפרק את המשטח למשולשים, כאשר נזכור אילו צלעות יש להדביק לאילו צלעות. משטח יקרא **טוב** אם הוא מתקבל מספרה ע"י אחת סדרת פעולות מסוג 1,2,3. משולש הוא טוב (זוהי ספרה עם חור!). לכן, מספיק להראות שאם מדביקים 2 משטחים טובים לאורך קו על השפות שלהם, מקבלים משטח טוב. כל המקרים האפשריים לכך (פרט למספר מקרים טריוויאליים ביותר...) מטופלים בתרגילים 3-1 (ואלה שלא - דומים)! לכן הטענה הוכחה. לגבי הטענה השקולה, נשאיר אותה כתרגיל אבל ניתן רמז: לפי תרגיל 4, אם הוספנו cross-cap ניתן להניח כי הוספנו רק כאלה. לכן ניתן להניח שהוספנו רק ידיות או רק cross-caps. נשאר להראות איך להציג הוספה של n ידיות או cross-caps כאחד מבין חברי 2 המשפחות N_g ו- Σ_g. בהצלחה עם זה!

<u>אפיין אויילר</u>

יופי מיינו את כל המשטחים נכון? לא! כי למיין זה אומר גם להגיד שכל אחד מהחברים שמצאנו שונים זה מזה.

זו בעיה... להגיד ש-2 דברים זהים זה יחסית קל, מזיזים אחד עד שמקבלים את השני (או במקרה שלנו, מביאים את שניהם לאחת מהצורות שתיארנו במיון...). אבל איך מראים ש-2 דברים שונים? בשביל זה צריך **אינווריאנטים**, כלומר מספרים או דברים כלשהם שקשורים למשטח ולא משתנים כשמזיזים אותו ברציפות. אינווריאנט הפשוט ביותר, שיספיק בשבילנו, הוא **אופיין אויילר.**

<u>הגדרה:</u> אם S משטח, אופיין אויילר שלו הוא V-E+F עבור שילוש כלשהו, כאשר V כמות הקודקודים, E כמות הצלעות ו-F זה כמות הפאות (מהמילים faces, edges, vertices). את אופיין אויילר מסמנים $\chi(S)$.

טענה 1: אופיין אויילר לא תלוי בשילוש.

הוכחה: אם יש לנו שני שילושים, נמצא שילוש כזה שמעדן את שניהם, כלומר נאחד אותם ונקבל חלוקה למצולעים של המשטח, ואז נחלק כל מצולע למשולשים. לכן מספיק לבדוק למקרה ששילוש אחד מעדן את השני. אבל אז מספיק להוסיף כל פעם צלע אחת. במקרה הזה, אם הצלע פוגשת נק' של השילוש ב-2 הקצבות, הוספנו קטע והגדלנו ב-1 את כמות הפאות. אחרת, הוספנו צלע אבל גם קודקוד. מש"ל.

טענה 2: אופיין אויילר הוא אינווריאנט.

הוכחה: ניקח שילוש. אם נזיז את המשטח באופן רציף, גם השילוש ישתנה באופן רציף. אבל ברור שכמות הצלעות, הקודקודים והפאות לא תשתנה בתהליך כי.

(למעשה, אפשר להראות אפילו יותר, שגם עם "נמעך" חלקים של המשטח באופן רציף, כלומר נכווץ חלקים כלשהם לנק', עדיין אופיין אויילר לא ישתנה. הרעיון דומה רק יש יותר מקרים לבדוק...).

מסקנה: כל המשטחים שהגדרנו שונים בזוגות

הוכחה: קודם כל, ברור שכמות החורים זה אינווריאנט. לכן, ניתן (ע"י סתימת כל החורים בדיסקים) להניח כי המשטח ללא חורים. אבל $\chi(\Sigma_g)=2g-2$ ו- $\chi(N_g)=g-2$. לכן בכל משפחה כל החברים שונים. ובסוף, כיצד נפריד את חברי המשפחה הראשונה מהשנייה?

טענה: אוריינטביליות היא אינווריאנט.

הוכחה: אם יש מסלול שהופך כיוון, אחרי הזזה רציפה המסלול שיתקבל אחרי הזזה עדיין יהפוך כיוון.

ניצחון!!! מיינו את כל המשטחים ולכן יש לנו שמחת חיים רבה.

סיכום: טופולוגיה ומשטחים זה דבר מאוד מגניב, ובגלל שלכולכם יש כל כך הרבה זמן חופשי שאתם לא עושים בו כלום, פתחו בבקשה את הספר

Algebraic Topology, Allen Hatcher וקראו...