# <u>פולינומים לירדן: תקצרי פתרונות</u>

1. נציב X=1. נקבל כי ערך הפולינום P בנקודה X=1 הוא אפס, מכאן שסכום המקדמים שלו הוא אפס. לכן לא כל המקדמים חיוביים.

2. נחמדות שקולה לתכונה הבאה: הערך של פולינום בנקודה X= -1 הוא אפס. לכן סכום של שני פולינומים נחמדים הוא בהכרח נחמד, ומכפלה של כל פולינום בפולינום נחמד גם כן נותנת פולינום נחמד. סכום של נחמד ולא נחמד לא יהיה נחמד אף פעם!

3. נתון כי 5 הוא שורש של פולינום $P(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+1$. אז
$0=\frac{P(5)}{5^5}=1+a\frac{1}{5}+b\frac{1}{5^2}+c\frac{1}{5^3}+d\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^5}=Q(\frac{1}{5})$
מכאן שלפולינום Q יש שורש 1/5.

4. נתון כי $a_0+a_2+a_4+\ldots$ וגם $a_1+a_3+a_5+\ldots$ ממשיים. זה אומר ש-
$P(1)\pm P(-1)$ הם מספרים ממשים, מכאן ש-$P(1),P(-1)$ הם מספרים ממשיים.
אבל $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ ואילו
$Q(x)=(x-x_1^2)(x-x_2^2)\ldots(x-x_n^2)$ ומכאן ש- $Q(1)=P(1)\,P(-1)$ הוא ממשי. נחסיר אחד (המקדם הראשי של Q) ונקבל כי $b_0+b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}$ ממשי.

5. לא, כי אחד הוא לא שורש של הפולינום $x^{2011}+x^{200}+2x^{72}-5$ אבל הוא אכן שורש של $x^7+x^3-2$ (בדיקה לפי סכום מקדמים).

6. לא, כי אם היה פולינום כזה, אז היינו יכולים לחלק אותו ב x-7 עם שארית ולקבל $P(x)=Q(x)(x-7)+5$, כאשר המקדמים של Q שלמים. נציב X=11 ונקבל $Q(11)=1/2$, וזה לא ייתכן.

7. נציב ערכים X=0, 1, -1 ונקבל כי c שלם, וכי 2a, 2b הם שלמים (זהו גם תנאי הכרחי וגם תנאי מספיק), אבל לא בהכרח a, b יהיו שלמים (דוגמא נגדית: $0.5\,x^2-0.5$).

8. אנו רוצים להגיד כי בכל שורה נמצאים ערכים של פולינום כלשהו בנקודות שלמות אי-שליליות. אכן, בשורה האפסית נמצאים הערכים בנקודות שלמות אי-שליליות של הפולינום $P_0=P$. בשורה הראשונה נמצאים הערכים בנקודות שלמות אי-שליליות של הפולינום $P_1$ אשר מוגדר כך: $P_1(x)=P_0(x+1)-P_0(x)$. אינדוקטיבית, נגדיר פולינומים $P_k(x)=P_{k-1}(x+1)-P_{k-1}(x)$. אז בשורה k יופיעו הערכים בנקודות שלמות אי-שליליות של הפולינום $P_k(x)$. נשים לב, כי הדרגה של $P_k(x)$ קטנה **לפחות באחד** מהדרגה של $P_{k-1}(x)$, ומכאן שהיא לכל היותר $\deg P-k$. בפרט, עבור כל $k>\deg P$ נקבל כי הפולינום $P_k(x)$ הוא אפס, ומכאן שהמספרים בשורה k (שהם ערכים של פולינום זה) הם אפסים. **למי שיודע מהי נגזרת, מומלץ לחשוב על הקשר בין תרגיל זה לגזירת פולינומים.**

9. **<u>בתרגיל הזה כל הפולינומים יהיו בעלי מקדמים שלמים</u>** (<u>לא נציין זאת כל פעם</u>).

<u>מקרה בסיסי</u>: מספר הוא רציונלי (מנה של שלמים) אם ורק אם הוא שורש של פולינום מדרגה 1(לינארי).

לכן אם $\sqrt{a},\sqrt{b}$ הם שלמים, אז $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ הוא שורש של פולינום לינארי (דרגה 1 היא מינימאלית).

<u>רעיון מרכזי</u>: אם $\sqrt{b}$ אינו שלם, אז ניתן להתבונן במספרים מהצורה $c+d\sqrt{b}$ כאשר $c,d$ שלמים (דומה למספרים מרוכבים, נכון?). מספרים כאלה ניתן לחבר, להכפיל אחד בשני ושוב לקבל מספרים מהצורה הזו.

על מספרים אלה יש פעולה חשובה, הצמדה: בהינתן $u:=c+d\sqrt{b}$ , הצמוד של u, המסומן $\bar{u}$, מוגדר להיות $c-d\sqrt{b}$.

<u>תרגיל (קל מאוד)</u>:

א. מספר מהצורה הנ"ל הוא צמוד לעצמו אם ורק אם הוא שלם (ז"א d=0).

ב. הצמדה שומרת על חיבור וכפל. כלומר, בהינתן $u:=c+d\sqrt{b}$, $v:=c'+d'\sqrt{b}$, מתקיים: $\bar{u}+\bar{v}=\overline{u+v}$, $\bar{u}\cdot\bar{v}=\overline{u\cdot v}$.

ג. בהינתן פולינום P כלשהו (מקדמים שלמים) ו- $u:=c+d\sqrt{b}$, מתקיים: $P(\bar{u})=\overline{P(u)}$.

מכאן שאם מספר $c+d\sqrt{b}$ הוא שורש של פולינום $P$, אז גם המספר $c-d\sqrt{b}$ הוא שורש של פולינום זה.

**מסקנה חשובה**: ישנם בדיוק שני המקרים:

- או ש- $c+d\sqrt{b}=c-d\sqrt{b}$ (כלומר, $d=0$),
- או ש- $d\neq 0$ ואז כל פולינום בעל שורש $c+d\sqrt{b}$ מתחלק בפולינום

$$\left(x-\left(c+d\sqrt{b}\right)\right)\left(x-\left(c-d\sqrt{b}\right)\right)=x^2-2cx+c^2-d^2b$$

(שהוא בעל מקדמים שלמים!). <u>מכאן ש- $x^2-2cx+c^2-d^2b$ הוא הפולינום בעל הדרגה החיובית המינימאלית מתוך הפולינומים ש- $c+d\sqrt{b}$ הוא השורש שלהם</u>.

נחזור לבעיה המקורית ונתבונן בשני מקרים:

<u>מקרה א'</u>: אם $\sqrt{a}$ שלם ואילו $\sqrt{b}$ אינו שלם (משמע אינו רציונלי), אז המספר $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ הוא מהצורה $c+d\sqrt{b}$ כאשר $c=\sqrt{a},d=1$.

לכן $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ הוא שורש של הפולינום $x^2-2\sqrt{a}x+a-b$ (מקדמים שלמים). כפי שהסברנו, זהו הפולינום <u>בעל הדרגה החיובית המינימאלית מתוך הפולינומים אשר</u> $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ הוא שורש שלהם. כמובן שאם $\sqrt{b}$ שלם ואילו $\sqrt{a}$ אינו שלם, אז מתקבלת תמונה דומה.

<u>מקרה ב'</u>: אם $\sqrt{a}$ ו- $\sqrt{b}$ אינם שלמים אבל המספר $\sqrt{ab}$ שלם, אז ניתן לכתוב $n^2a=k^2b$ עבור מספרים $k,n$ שלמים חיוביים כלשהם. אז $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{1}{n}(k+n)\sqrt{b}$. נתבונן במספר $c+d\sqrt{b}$ כאשר $c=0,d=k+n$.

אז נסיק כי $(k+n)\sqrt{b}$ הוא שורש של הפולינום $x^2-(k+n)^2b$ . מכאן ש- $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{1}{n}(k+n)\sqrt{b}$ הוא שורש של הפולינום

$$\frac{1}{n^2}(n^2x^2-(k+n)^2b)=x^2-a-b-2\sqrt{ab}$$

כפי שהסברנו, זהו הפולינום <u>בעל הדרגה החיובית המינימאלית מתוך הפולינומים אשר</u> $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ הוא שורש שלהם.

כדי לבדוק אם הבנתם את המקרה הזה, מומלץ להתבונן במקרה פרטי בו $\sqrt{b}$ אינו שלם ו- $\sqrt{a}$ הוא כפולה שלמה של $\sqrt{b}$.

<u>הכללה של הרעיון המרכזי הנ"ל</u>: נניח כי $\sqrt{a}$ ו- $\sqrt{b}$ אינם שלמים וגם המספר $\sqrt{ab}$ אינו שלם. אז ניתן להתבונן במספרים מהצורה $c+d\sqrt{a}+e\sqrt{b}+f\sqrt{ab}$ כאשר $c,d,e,f$ שלמים. מספרים כאלה ניתן לחבר, להכפיל אחד בשני ושוב לקבל מספרים מהצורה הזו (וודאו כי ברור לכם איכן אנו משתמשים בכך ש- $\sqrt{a}$ ו- $\sqrt{b}$ אינם כפולות שלמות אחד של שני!).

על מספרים אלה יש **שבע** פעולות הצמדה, $-a,-b,-ab,-a,b,-a,ab,-b,ab,-a,b,ab$:

בהינתן $u:=c+d\sqrt{a}+e\sqrt{b}+f\sqrt{ab}$ , ל- u יש שבע צמודים, המסומנים $\bar{u}^a,\bar{u}^b,\bar{u}^{ab},\bar{u}^{a,b},\bar{u}^{a,ab},\bar{u}^{b,ab},\bar{u}^{a,b,ab}$, המוגדרים להיות

$$\bar{u}^a:=c-d\sqrt{a}+e\sqrt{b}+f\sqrt{ab},\qquad \bar{u}^b:=c+d\sqrt{a}-e\sqrt{b}+f\sqrt{ab},$$
$$\bar{u}^{ab}:=c+d\sqrt{a}+e\sqrt{b}-f\sqrt{ab},\qquad \bar{u}^{a,b}:=c-d\sqrt{a}-e\sqrt{b}+f\sqrt{ab},$$
$$\bar{u}^{a,ab}:=c-d\sqrt{a}+e\sqrt{b}-f\sqrt{ab},\qquad \bar{u}^{b,ab}:=c+d\sqrt{a}-e\sqrt{b}-f\sqrt{ab},$$
$$\bar{u}^{a,b,ab}:=c-d\sqrt{a}-e\sqrt{b}-f\sqrt{ab}$$

<u>תרגיל (קל)</u>:

מספר מהצורה $c+d\sqrt{a}+e\sqrt{b}+f\sqrt{ab}$ הוא שלם אם ורק אם **כל אחת** מפעולות ההצמדה $-a,-b,-ab$ שומרת עליו. כמו כן, הטענות בסעיפים ב', ג' בתרגיל הנ"ל נכונות עבור כל אחת מהשבעת פעולות ההצמדה.

מכאן שאם מספר $u=c+d\sqrt{a}+e\sqrt{b}+f\sqrt{ab}$ הוא שורש של פולינום $P$, אז גם המספרים $\bar{u}^a,\bar{u}^b,\bar{u}^{ab},\bar{u}^{a,b},\bar{u}^{a,ab},\bar{u}^{b,ab},\bar{u}^{a,b,ab}$, הם שורשים של פולינום זה. ניתן להמשיך ולפתח את האנאלוגיה עם הרעיון המרכזי גם במקרה זה ולהכליל את התורה הזו לכל מספר שורשים (לא רק אחד ושניים כפי שעשינו כאן). זהו הבסיס של **<u>תורת גלואה</u>**, ענף חשוב ומעניין מאוד במתמטיקה (ניתן לקרוא עליו גם בוויקיפדיה).

אבל אנחנו נתמקד רק בחלק אשר יידרש כדי לפתור את הבעיה המקורית: בהינתן מספר $u=c+d\sqrt{a}+e\sqrt{b}$, הוא יהיה שורש של פולינום P אם ורק אם ארבעת המספרים $u,\bar{u}^a,\bar{u}^b,\bar{u}^{a,b}$ הם שורשים של $P$.

**מסקנה חשובה** (הכללה של המסקנה החשובה הקודמת!): ישנם בדיוק ארבע המקרים:

- או ש- $u,\bar{u}^a,\bar{u}^b,\bar{u}^{a,b}$ כולם שווים (כלומר, $e,d=0$, ולכן $u$ הוא מספר שלם),
- או ש- $e=0,d\neq 0$ ולכן $u=\bar{u}^b,\bar{u}^a=\bar{u}^{a,b}$. אז כל פולינום בעל שורש $u=c+d\sqrt{a}$ מתחלק בפולינום

$$\left(x-\left(c+d\sqrt{a}\right)\right)\left(x-\left(c-d\sqrt{a}\right)\right)=x^2-2cx+c^2-d^2a$$

(שהוא בעל מקדמים שלמים!). מכאן ש- $x^2-2cx+c^2-d^2a$ הוא הפולינום בעל הדרגה החיובית המינימאלית מתוך הפולינומים ש- $c+d\sqrt{a}$ הוא השורש שלהם.

- או ש- $d=0, e\neq 0$ ולכן $u=\ \bar{u}^a, \bar{u}^b=\ \bar{u}^{a,b}$. אז כל פולינום בעל שורש $u=c+e\sqrt{b}$ מתחלק בפולינום

$$\left(x-\left(c+e\sqrt{b}\right)\right)\left(x-\left(c-e\ \sqrt{b}\right)\right)=x^2-2cx+c^2-e^2b$$

(שהוא בעל מקדמים שלמים!). מכאן ש- $x^2-2cx+c^2-e^2b$ הוא הפולינום בעל הדרגה החיובית המינימאלית מתוך הפולינומים ש- $c+e\sqrt{b}$ הוא השורש שלהם.

- או ש- $e,d\neq 0$ ואז כל ארבעת המספרים $u,\bar{u}^a,\bar{u}^b,\bar{u}^{a,b}$ **שונים**. אז כל פולינום בעל שורש $u=c+d\sqrt{a}+e\sqrt{b}$ מתחלק בפולינום

$$(x-u)(x-\bar{u}^a)(x-\ \bar{u}^b)(x-\ \bar{u}^{a,b})=$$
$$=\left(x-\left(c+d\sqrt{a}+e\sqrt{b}\right)\right)\left(x-\left(c-d\sqrt{a}+e\sqrt{b}\right)\right)\cdot$$
$$\cdot\left(x-\left(c+d\sqrt{a}-e\sqrt{b}\right)\right)\left(x-\left(c-d\sqrt{a}-e\sqrt{b}\right)\right)\cdot$$

(בדקו שהוא בעל מקדמים שלמים – כתבו מקדמים אלו במפורש!). מכאן שהפולינום הנ"ל הוא הפולינום בעל הדרגה החיובית המינימאלית מתוך הפולינומים ש- $c+d\sqrt{a}+e\sqrt{b}$ הוא השורש שלהם.

נחזור לבעיה המקורית: ניקח $e,d=1,c=0$. נקבל כי הפולינום

$$\left(x-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\right)\left(x-\left(-\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\right)\cdot$$
$$\cdot\left(x-\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\right)\left(x-\left(-\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\right)$$

הוא הפולינום בעל הדרגה החיובית המינימאלית מתוך הפולינומים ש- $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ הוא השורש שלהם.