תרגיל סדרתי

בתרגיל זה המילה טבעי והסימון $\mathbb{N}$ אומר בלי 0.

1. חשבו את $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{8} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor + ...$.

2. פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מקיימת $f\left(m+f\left(n\right)\right)=n+f\left(m+95\right)$ לכל $m,n\in\mathbb{N}$.
חשבו את $f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+...+f\left(19\right)$.

3. נתבונן בפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שמוגדרת על ידי $f\left(1\right)=1$, $f\left(3\right)=3$,
$$f\left(2n\right)=f\left(n\right),$$
$$f\left(4n+1\right)=2f\left(2n+1\right)-f\left(n\right),$$
$$f\left(4n+3\right)=3f\left(2n+1\right)-2f\left(n\right),$$
מצאו את כמות המספרים הטבעיים עד 1988 (כולל) שמקיימים $f\left(n\right)=n$.

4. נגדיר סדרה ע"י $u_0=2$, $u_1=2\frac{1}{2}$, ונוסחת נסיגה $u_{n+1}=u_n\left(u_{n-1}^2-2\right)-u_1$.
הראו כי לכל n, $3\left\lfloor \log_2 u_n \right\rfloor$ נבדל ב-1± מחזקה שלמה של 2.

5. נגדיר סדרה $a_1=4$ ובנוסף $a_{n+1}=a_n^2-2$. הראו שלכל n קיים משולש שצלעותיו הם a_n-1, a_n, a_n+1 ושטחו שלם.

6. נגדיר סדרה באמצעות $u_1=2$, $u_2=u_3=7$ ונוסחת נסיגה $u_{n+1}=u_nu_{n-1}-u_{n-2}$.
הראו כי לכל n, המספר u_n נבדל ב-2 מריבוע שלם.

7. נגדיר $\sigma\left(n\right)$ להיות כמות הספרות האי-זוגיות של מספר n ברישום עשרוני. חשבו את הערך של הביטוי $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sigma\left(2^m\right)}{2^m}$.

8. האם $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f\left(f\left(n\right)\right)=f\left(n\right)+n$ ובנוסף $f\left(1\right)=2$?

9. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, כך ש-$f\left(f\left(n\right)\right)<f\left(n+1\right)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

10. נתונה סדרה $a_1, a_2, a_3, ...$. קיים s, כך שלכל $n>s$ מתקיים
$$a_n=\max\left\{a_k+a_{n-k}\,|\,1\le k\le n\right\}.$$
הראו שקיימים מספרים טבעיים $\ell<s$ ו-N, כך שלכל $n\ge N$ מתקיים $a_n=a_\ell+a_{n-\ell}$.

11. מצאו את כל הפונקציות $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עבורן $\left(g\left(m\right)+n\right)\left(g\left(n\right)+m\right)$ הוא ריבוע שלם לכל $m,n\in\mathbb{N}$.

בהצלחה!