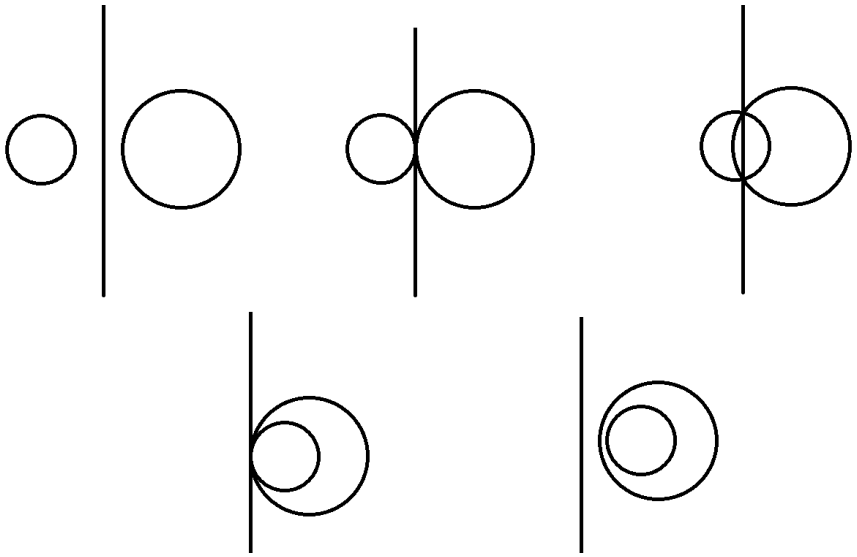
ציר רדיקלי

שאלה 1. א. על עוגה (שהיא מצולע קמור) נמצאים מלבני שוקולד שלא עולים שזה על זה. האם ניתן לחלק את העוגה לחלקים קמורים, כך שבכל חלק יש מלבן שוקולד אחד בדיוק?
ב. אותה שלה, אבל כעת מקום מלבני שוקולד פרוסות של פרי כדורי.

נדבר על שתי שאלות קשורות, שקשורים לשני מעגלים נתונים, α, β.
א. מהו המקום הגיאומטרי של נקודות, כאלה שמשיק מ-X ל α שווה באורכו לאורך המשיק מ-X ל- β ?
ב. מהו המקום הגיאומטרי של נקודות, כאלה שדרגת הנקודה X ביחס ל- α שווה לדרגה של X ביחס ל- β ?

תזכורת: דרגה של נקודה. נתונים מעגל ונקודה P. מעבירים דרך P ישר כלשהו שחותך את המעגל בנקודות A, B. אז $PA \cdot PB$ לא תלוי בשיפוע של הישר אלה רק בנקודה ומעגל. מספר זה נקרא הדרגה של נקודה P ביחס למעגל.
עדיף לרשום את הכול בקטעים מכוונים, ואז דרגה תהיה שלילית בפנים וחיובית בחוץ, תהיה שווה ל- $OP^2 - R^2$, כאשר O זה מרכז המעגל ו-R הוא הרדיוס.

התשובה לשאלות ששאלנו לגבי שוויון של דרגות\אורכי משיקים (שזה בערך אותו דבר): המקום הגיאומטרי הוא קו ישר, וקוראים לו **הציר הרדיקלי** של שני המעגלים. הנה תמונות של מצבים שונים:



כמובן, במקרה של מעגלים נחתכים, התשובה לשאלה א' היא: "ישר ללא קטע".
תשובה לשאלה ב' זה תמיד קו ישר, חוץ מהמקרה של מעגלים קונצנטריים (בעלי מרכז משותף).

הוכחה ראשונה. נבחר מערכת צירים, שבה המרכזים נמצאים על ציר ה-x, וקואורדנטות שלהם שווים $(c_1,0)$, $(c_2,0)$, והרדיוסים הם r_1, r_2. הדרגה יחסית למעגל הראשון הוא $(x-c_1)^2 + y^2 - r_1^2$, ויחסית למעגל השני $(x-c_2)^2 + y^2 - r_2^2$. נרשום את השוויון וכל החלק הריבועי מצטמצם, נשארים עם משוואה לינארית על x.

הוכחה שנייה. קליפות כדוריות במרחב.

נעבור לדוגמאות של שאלות שאפשר לפתור באמצעות הציר הרדיקלי. הדוגמה הראשונה היא שאלה 1 ב'.

שאלה 2. על הצלעות של משולש ABC נבחרו 6 נקודות שונות: P_1, P_2 על BC, Q_1, Q_2 על AC, R_1, R_2 על AB (לא בקודקודים). יוסי הצליח להוכיח כי P_1, P_2, Q_1, Q_2 על מעגל אחד, וגם Q_1, Q_2, R_1, R_2 על מעגל אחד, וגם P_1, P_2, R_1, R_2 על מעגל אחד. האם בהכרח כל הנקודות $P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2$ נמצאות על מעגל אחד?

שאלה 3. נתונים 3 מעגלים שנחתכים בזוגות, ומרכזיהם לא על אותו ישר. לכל מעגל מעבירים את הישר של המיתר המשותף שלהם. הוכח כי הישרים האלה נפגשים בנקודה אחת.
פתרון. לנקודת החיתוך של שני צירים רדיקליים יש אותה דרגה ביחס לשלושת המעגלים, לכן היא גם על הציר השלישי. *הערה: נקודה זו נקראת לפעמים מרכז רדיקלי.*

שאלה 4. (תחרות הערים 32, סתיו, י"א-י"ב, שאלה 5). מרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו O, כאשר נקודה O לא נמצאת על אף אלכסון שלו. נתון כי מרכז המעגל החוסם של AOC נמצא על הישר BD. הוכח כי מרכז המעגל החוסם של BOD נמצא על הישר AC.

פתרון. (דן כרמון). נוכיח משפט יותר כללי:
משפט. נתונים 3 מעגלים, α, β, γ. נתבונן ב-3 טענות הבאות:
א. ציר רדיקלי של β ו-γ מכיל את המרכז של α.
ב. ציר רדיקלי של α ו-γ מכיל את המרכז של β.
ג. ציר רדיקלי של α ו-β מכיל את המרכז של γ.
אז מבין 3 טענות הללו כל שתיים גוררות את השלישית.

למה המשפט מכליל את הטענה? נסתכל במעגלים AOC, BOD, ABCD. מש"ל.

הוכחת המשפט. נסמן את מרכזי המעגלים α, β, γ ב-X, Y, Z בהתאמה, ואת הרדיוסים שלהם r_1, r_2, r_3. תנאי א' אומר כי ציר רדיקלי של β ו-γ מכיל את X, במילים אחרות:

$$XZ^2 - r_3^2 = XY^2 - r_2^2$$

אפשר להעתיק את א' גם בצורה: $XZ^2 - XY^2 = r_3^2 - r_2^2$

באופן דומה אפשר להעתיק את ב' בצורה $YX^2 - YZ^2 = r_1^2 - r_3^2$

ואת תנאי ג' אפשר לרשום באופן דומה בתור $ZY^2 - ZX^2 = r_2^2 - r_1^2$.

סכום של 3 זהויות אלו נותן זהות 0 = 0. לכן אם שניים מתוכן נכונות, אז גם השלישית נכונה.

משפט הציר האורטוצנטרי. ניקח משולש ABC, ובו הגבהים AP, BQ, CR. נקודת חיתוך של PQ ו-AB היא F, נקודת חיתוך של PR ו-AC היא E, נקודת חיתוך של PR ו-AC היא E, נקודת חיתוך של QR ו-BC היא D. הוכח כי D,E,F נמצאים על ישר אחד, וישר זה מאונך לישר של אוילר.
הוכחה. זה הציר הרדיקלי של שני מעגלים: מעגל 9 נקודות ושל המעגל החוסם.
בשביל לראות ש-F נמצא על הציר מספיק להשתמש במשפט הדרגה של נקודה למעגל ABQP.

נקודה למחשבה. יש הכללה בו-זמנית למעגל אפולוניוס ולציר הרדיקלי. המקום הגיאומטרי של נקודות שמנת הדרגות שלהם ביחס לשני מעגלים נתונים הוא מעגל מוכלל (מעגל אם היחס = 1, וישר אם היחס שונה מ-1).