בד"כ מקומות גיאומטריים בשאלות אולימפיאדה נוצרים ישרים ומעגלים (אליפסות ועקומות יותר מסובכות הן לא "אלמנטאריות"). אנחנו נדבר על שני מקומות גיאומטריים מפורסמים: הציר הרדיקלי ומעגל אפולוניוס.

מעגל אפולוניוס

נניח שיש לנו שתי נקודות A, B. מהו המקום הגיאומטרי של נקודות X, כאלה ש- AX/BX = k קבוע?

התשובה: אנך אמצעי עבור k = 1 , מעגל בכל מקרה אחר.

הערה. זה קצת יותר מדי טוב בשביל להיות נכון. אם שואלים אותה שאלה עבור פעולת חשבון אחרת כלשהי, אז עבור "+" מקבלים אליפסה, עבור "–" מקבלים ענף של היפרבולה, עבור "×" מקבלים עקומים מדרגה 4 שנקראים ע"ש Cassini. ודווקא פעולת חשבון הכי מסובכת נותנת את הסוג הפשוט ביותר של עקומים.

המעגלים שמתקבלים נקראים מעגלי אפולוניוס.
כמובן צריך עוד להוכיח שזה מעגלים.

הוכחה ראשונה. נשתמש בתכונת חוצה זווית. חוצי זוויות פנימי וחיצוני של הזווית AXB חייבים לפגוש את הישר AB בנקודות ספציפיות C, D שאפשר למצוא אותן עוד לפני ש-X נקבע. לכן X נמצא על מעגל שקוטרו CD. לכן כל נקודה של המקום הגיאומטרי שייכת למעגל. כיוון הפוך (כל נקודה על מעגל שקוטרו CD שייכת למקום הגיאומטרי) מתקבל מהכיוון הראשון בשילוב עם שיקולי רציפות.

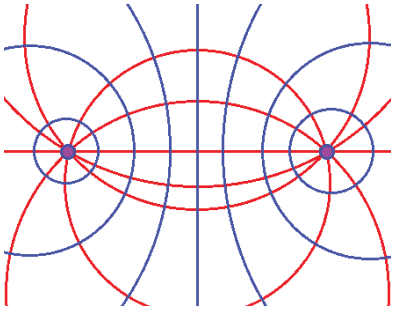
הוכחה שנייה. נשתמש בגיאומטריה אנליטית. $\frac{(x-x_a)^2+(y-y_a)^2}{(x-x_b)^2+(y-y_b)^2}=k^2$. נכפיל במחנה. אם x^2+y^2 לא מצטמצם, נקבל משוואת מעגל.

תכונות של מעגל אפולוניוס:
א. מרכז שלו נמצא על הישר AB.
ב. מעגל אפולוניוס זה בדיוק מעגל, שלגביו A אינברסי ל-B.
ג. כל מעגל שעובר דרך A ו-B מאונך למעגל אפולוניוס.
ד. נניח שנקודה X נמצאת על מעגל אפולוניוס. הישר AX פוגש את המעגל שוב ב-M, והישר BX פוגש את המעגל שוב ב-W. אז M סימטרי ל-W ביחס לישר AB.

הוכחות:
א. ברור מסימטריה (ביחס ל-AB).
ב. תזכורת לגבי אינברסיה:

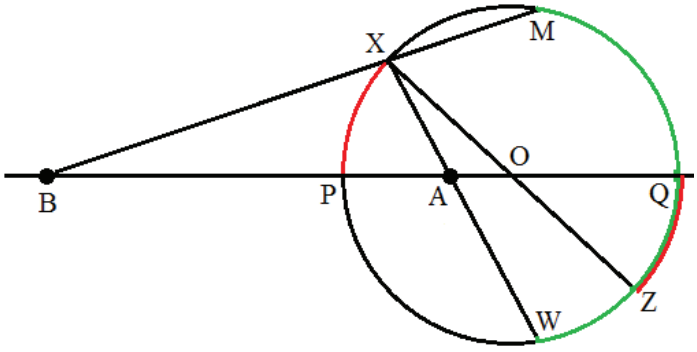
אינברסיה זו העתקה מסוימת, ששומרת על נקודות של מעגל כלשהו, ומחליפה בין נקודות פנימיות לחיצוניות. היא מוגדרת בצורה כזאת: נקודה P עוברת לנקודה Q, אם הם נמצאים על אותה קרן שיוצאת מ-O, ובנוסף
$OP \cdot OQ = R^2$

לאינברסיה יש מספר תכונות חשובות, למשל:
(1) היא שומרת על "מעגלים מוכללים", כלומר מעבירה מעגלים וישרים למעגלים וישרים.
(2) שומרת על זוויות.
(3) שומרת על יחס כפול $[A,B;C,D]=\frac{AC}{AD}\Big/\frac{BC}{BD}=\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}$.



נניח כי A אינברסי ל-B ביחס למעגל נתון, ונניח כי P, Q על המעגל. אז היחס $\frac{AP\cdot BQ}{AQ\cdot BP}$ לא ישתנה אם נחליף בין A לבין B. אבל הוא יתהפך.
כלומר $\frac{AP\cdot BQ}{AQ\cdot BP}=1$. לכן $\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{BQ}$.

ג. כל מעגל שעובר דרך A ו-B מאונך למעגל אפולוניוס – מתקבל ישירות מאינברסיה.
זה מאפשר לצייר תמונה של מעגלים שעוברים דרך 2 נקודות (אדום) ומעגלי אפולוניוס שלהם (כחול) שבה כל המעגלים האדומים מאונכים לכל המעגלים הכחולים.



ד. חוצה זווית חיצוני של AXB חותך את הקשת MW באמצע, אבל מצד שני ב-Q. מש"ל.
בציור זה רואים גם כי AXO שווה ל-XBO, לכן המשולשים AXO, XBO דומים, וזה שוב מוכיח שיש אינברסיה.

נקודה למחשבה: מהו המקום הגיאומטרי של יחס קבוע במרחב?

ציר רדיקלי

נדבר על שתי שאלות קשורות, שקשורים לשני מעגלים נתונים, α,β.
א. מהו המקום הגיאומטרי של נקודות, כאלה שמשיק מ-X ל α שווה באורכו לאורך המשיק מ-X ל- β?
ב. מהו המקום הגיאומטרי של נקודות, כאלה שדרגת הנקודה X ביחס ל- α שווה לדרגה של X ביחס ל- β?

תזכורת: דרגה של נקודה. נתונים מעגל ונקודה P. מעבירים דרך P ישר כלשהו שחותך את המעגל בנקודות A, B. אז $PA\cdot PB$ לא תלוי בשיפוע של הישר אלה רק בנקודה ומעגל. מספר זה נקרא הדרגה של נקודה P ביחס למעגל.
עדיף לרשום את הכול בקטעים מכוונים, ואז דרגה תהיה שלילית בפנים וחיובית בחוץ, תהיה שווה ל- OP^2-R^2, כאשר O זה מרכז המעגל ו-R הוא הרדיוס.

התשובה לשאלות ששאלנו לגבי שוויון של דרגות\אורכי משיקים (שזה בערך אותו דבר): המקום הגיאומטרי הוא קו ישר, וקוראים לו **הציר הרדיקלי** של שני המעגלים. הנה תמונות של מצבים שונים: