תרגיל תמורות

על המדף בספרייה נמצאים N הכרכים של אנציקלופדיית היקום.
ג'ק העבריין מגיע מדי פעם לספריה ומנסה לבלגן את הספרים בכל מיני דרכים.
סופי הספרנית מגיעה לספריה בבוקר ומנסה לסדר את הכרכים בסדר הנכון.

0. ביום ראשון ג'ק מבצע החלפות של זוגות ספרים. במקביל הוא מצייר גרף על N קודקודים: הוא מחבר קודקודים i ו- j בקשת אם הוא מחליף ספרים i ו- j במקומות שלהם. לאחר $N-1$ החלפות הוא הולך הביתה. הראו שהתמורה שהוא יצר היא מעגל בגודל N אם ורק אם הגרף שהוא צייר מהווה עץ.

1. בוקר אחד סופי מגיעה לספריה ומגלה שג'ק שינה את סדר הכרכים. כמה דקות היא צריכה על מנת לסדר את כל הכרכים בסדר הנכון במקרה הגרוע ביותר (לאותו סעיף), אם
א. בכל דקה היא יכולה להחליף מקומות של שני כרכים סמוכים.
ב. בכל דקה היא יכולה להחליף מקומות של שני כרכים כלשהם.
ג. בכל דקה היא יכולה להוציא שלשה כרכים כלשהם מהמדף, ולהחזיר אותם לאותם המקומות בסדר כלשהו לפי בחירתה.
ד. בכל דקה היא יכולה לקחת כרך ולהעביר אותו לקצה הימני של השורה.
ה. בכל דקה היא יכולה לקחת כרך ולהעביר אותו למקום כלשהו בשורה לפי בחירתה.

2. ג'ק גילה שסופי מסדרת את המדף כל בוקר. הוא התעצבן, החליף את סדר הספרים בצורה מסוימת, והחליט שהוא יגיע לספריה כל ערב על מנת לתחזק את הבלגן. נניח שבכל בוקר סופי מוציאה S כרכים כלשהם ומחזירה אותם לאותם המקומות בסדר כלשהו לפי בחירתה, וכל ערב ג'ק לוקח J כרכים רצופים ומחזיר אותם לאותם המקומות בסדר כלשהו לפי בחירתו. כמות הספרים המקסימלית שסופי תצליח להחזיר למקום בו-זמנית תסומן ב- $Q(J,S)$.
א. מצאו את $Q(2,2)$.
ב. הראו כי $\frac{N}{5} \le Q(2,3) \le \frac{N}{2}+3$ (אם יש לכם קבועים אחרים, גם טוב).
ג. עקרון ניצחון הסדר: עבור $S \ge 4$, ו- J כלשהו, הראו שקיים $0<\alpha<1$ שאינו תלוי ב- N כך ש- $Q(J,S) \ge \alpha N$.
ד. עקרון ניצחון הבלגן: עבור $J \ge S \ge 4$ קיים $0<\beta<1$ כך ש- $Q(J,S) \le \beta N$ לכל N מספיק גדול.

3. נשנה את כללי המשחק: כל בוקר סופי מוציאה S כרכים רצופים ומחזירה אותם לאותם המקומות בסדר כלשהו לפי בחירתה, וכל ערב ג'ק לוקח J כרכים רצופים ומחזיר אותם לאותם המקומות בסדר כלשהו לפי בחירתו. כמות הכרכים המרבית שסופי תצליח להחזיר למקום בו-זמנית תסומן $R(J,S)$.

א. הוכיחו כי $0 < R(2,3) \le 3$ לכל N.

ב. מצאו את $R(2,3)$ לכל N זוגי.

ג. הוכיחו את עקרון ניצחון הסדר עבור $S \ge 5J$.

4. נניח שבכל מהלך סופי מחליפה סדר של S ספרים רצופים, וג'ק מחליף זוג ספרים כלשהם. נסמן $T(S)$ כמות הספרים המרבית שסופי תצליח להחזיר למקום בו-זמנית.

א. הראו ש-$T(S)$ קטן מקבוע שאינו תלוי ב-N (אבל תלוי ב-S).

ב. עקרון הבלגן המוחלט: לכל S ולכל N מספיק גדול $T(S)=0$.

5. בשאלה זאת $N=100$. נניח שבכל בוקר סופי מוציאה S כרכים כלשהם ומחזירה אותם לאותם המקומות בסדר כלשהו לפי בחירתה, וכל ערב ג'ק לוקח J כרכים כלשהם ומחזיר אותם לאותם המקומות בסדר כלשהו לפי בחירתו.

יהי $P(J,S)$ המספר המרבי של כרכים שסופי תצליח אי-פעם להחזיר למקומותיהם בו-זמנית.

א. מצאו את $P(J,S)$ עבור $S > J+1$.

ב. מצאו את $P(2,3)$.

ג. מצאו את $P(2k,2k+1)$.

ד*. הוכיחו כי $P(3,4) \le 28$.

ה*. מצאו את $P(3,4)$.

ו. הראו כי $P(2k-1,2k) \le \left\lfloor \frac{100}{2k} \right\rfloor + 2k - 1$ עבור $k < 20$.

ז. נסו להעריך את $P(2k-1,2k)$.

ח. האם יתכן ש-$P(2k-1,2k)$ יקטן כאשר נחליף את $N=100$ במספר יותר גדול?