Долгий путь короля

Н.БЕЛУХОВ (БОЛГАРИЯ)

Посвящается Евгению Гику

В «КВАНТЕ» №3 ЗА 2000 ГОД БЫЛА НАПЕЧАТАНА НЕБОЛЬшая заметка И.Акулича «Прогулки короля». В ней автор поставил несколько интересных открытых вопросов, в том числе и такой:

Какова наибольшая возможная длина замкнутого пути короля, обошедшего шахматную доску 8×8?

Более точно, пусть король обошел шахматную доску, побывав на каждой клетке по разу, и последним ходом вернулся в исходную клетку. Если соединить отрезками центры полей, которые он последовательно проходил, получится замкнутая ломаная (скорее всего, самопересекающаяся). Какова наибольшая возможная длина этой ломаной?

Ясно, что ломаная стоит из отрезков двух типов – коротких (длины 1) и длинных (длины $\sqrt{2}$). Поэтому достаточно найти минимальное возможное количество коротких ходов короля.

Этим мы и займемся. Фактически мы решим задачу в общем случае – для досок $2n\times 2n$ (задача для досок с нечетной длиной стороны решается, как мы скоро увидим, совсем просто).

Рассмотрим шахматную доску $2n\times 2n$ и построим вспомогательную доску, которая называется доской Уэлча. Для этого уберем на исходной доске все клетки одного цвета, а каждую клетку другого цвета заменим на квадрат с длиной стороны в $\sqrt{2}$ раз больше, который повернут на 45° вокруг центра клетки (рис.1).

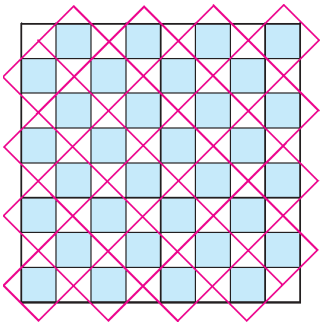


Рис. 1

Пока король делает длинные, т.е. диагональные, ходы, он остается на клетках одного цвета. Более того, такие ходы короля соответствуют движению «хромой» ладьи по доске Уэлча (хромая ладья ходит как обычная, но за ход сдвигается только на соседние клетки).

Если считать, что есть две доски Уэлча – по одной для белых и черных клеток исходной доски, то каждый короткий ход короля можно понимать как прыжок ладьи с «белой» доски Уэлча на «черную» или наоборот. Поэтому любой маршрут короля представляется как путь хромой ладьи по двум доскам Уэлча, прыгающей с одной доски на другую, когда король делает короткий ход. Число прыжков равно числу коротких ходов короля. Поскольку наша цель – наименьшее количество таких ходов, будем искать маршрут хромой ладьи по одной доске Уэлча, который состоит из наименьшего числа непрерывных участков.

Покрасим доску Уэлча в шахматном порядке, как показано на рисунке 2. На любом участке пути нашей ладьи белые

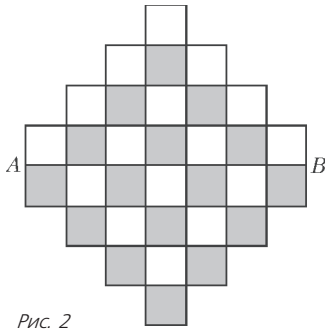


Рис. 2

и черные клетки чередуются, поэтому разница между количествами одних и других на любом участке не превосходит 1.

Если исходная шахматная доска имеет размеры $(2n+1)\times(2n+1)$, то на одной из раскрашенных досок Уэлча клеток одного цвета будет больше, чем другого, причем не меньше чем на $2n+1$. Это означает, что потребуется не меньше $2n+1$ непрерывных кусков пути, чтобы посетить все клетки одной доски. Следовательно, будет не меньше $4n+2$ прыжков с одной доски на другую (по два прыжка на каждый кусок пути).

Итак, если у шахматной доски нечетный размер, то король, обойдя доску по замкнутому пути, сделает не меньше $4n+2$ коротких ходов. Это достаточно большое число, и построить соответствующий пример пути не очень сложно.

Упражнение. Сделайте это.

Если же шахматная доска четного размера, то каждая из досок Уэлча содержит поровну белых и черных клеток. Но их расположение даст нам ключ к решению. Пусть при движении по доске Уэлча ладья оставляет след – линию, соединяющую центры клеток, которые ладья последовательно посещает. Когда ладья прыгает (на другую доску), линия прерывается, зато потом начнется новая. Если ладья посетила все клетки, то несколько таких линий «покрывают» всю доску.

Мысленно разрежем доску, изображенную на рисунке 2, на две одинаковые части по отрезку AB. Этот отрезок делит некоторые линии на части. Заметим, что нижняя половина доски содержит на n черных клеток больше, чем белых. Это означает, что есть не меньше n линий или их частей, которые начинаются и заканчиваются в черной клетке. Аналогично, рассматривая верхнюю половину, получим, что есть не меньше n линий или их частей, которые начинаются и заканчиваются в белой клетке. Всего получается не меньше $2n$ линий или их частей. Но склеивание частей линий по отрезку AB уменьшит их количество не больше чем на n (ведь есть только n возможных мест склейки).

Значит, на каждой доске Уэлча было нарисовано не меньше n линий. Получается, что король должен совершить не меньше $2n$ горизонтальных или вертикальных ходов. Отметим, что для частного случая обычной шахматной доски 8×8 И.Акулич получил такую же оценку гораздо проще.

Теперь приступим к построению примеров, в которых король делает ровно $2n$ коротких ходов.

На рисунках 3 и 4 показаны примеры самых длинных возможных маршрутов на доске 8×8. Таким образом, исходная задача решена.

Маршрут рисунка 3 несложно перенести на случай произвольного n, что дает решение в общем случае. Тем не менее, мы сейчас опишем конструкцию, которая позволила получить эти примеры. Оказывается, что она помогает построить еще много максимальных маршрутов, и автор подозревает, что с ее помощью можно описать вообще все такие маршруты (это пока строго доказано лишь для $n \le 4$).

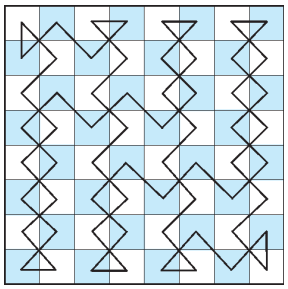


Рис. 3

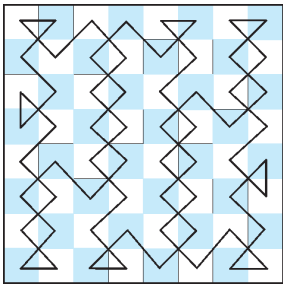


Рис. 4

Для наглядности разберем случай доски 8×8 (т.е. случай $n = 4$), все рассуждения легко переносятся и на общий случай. Сначала подготовим шахматную доску: отметим центры всех клеток и нарисуем синие, красные и зеленые отрезки, как показано на рисунке 5.

Из центра каждой клетки выходит ровно три отрезка – по одному отрезку каждого цвета.

Красные и зеленые отрезки образуют четыре «кольца»: первое кольцо состоит из одинарных сплошных отрезков, второе – из двойных сплошных, третье – из одинарных пунктирных, и четвертое – из двойных пунктирных отрезков.

Зафиксируем любое четырехбуквенное слово – код, каждая буква которого – либо «*к*», либо «*з*». Если первая буква кода – «*к*», то в первом кольце оставим только красные отрезки, а зеленые сотрем. Если же первая буква – «*з*», то наоборот, оставим в первом кольце только зеленые отрезки, а красные сотрем. Аналогично, глядя на вторую букву кода, во втором кольце сотрем отрезки либо красного, либо зеленого цвета. Так же поступим и с третьим, и с четвертым кольцом. В результате, в соответствии с выбранным кодом, на рисунке 5 мы сотрем половину отрезков в каждом кольце. Например, если выбрать код «*кзкк*», то после стирания мы увидим ситуацию, изображенную на рисунке 6.

Рассмотрим набор отрезков, оставшийся после стирания. В каждом кольце кроме диагональных отрезков останутся либо ровно два горизонтальных, либо ровно два вертикальных отрезка, т.е. всего останется ровно 8 горизонтальных и вертикальных отрезков (как и должно быть в самом длинном замкнутом пути короля).

Видим, что из центра каждой клетки теперь выходит ровно два отрезка, один из которых синий, а другой – либо

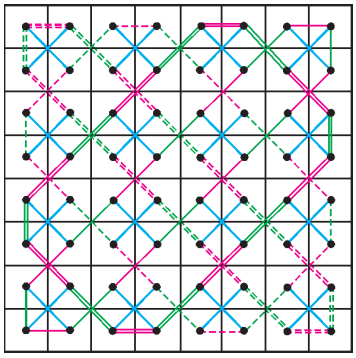


Рис. 5

красный, либо зеленый. Значит, объединение отрезков является либо замкнутым циклом, либо объединением нескольких циклов.

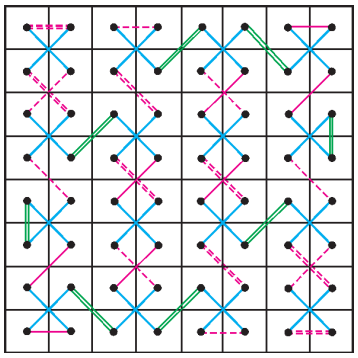


Рис. 6

В первом случае мы и получаем нужный пример обхода короля.

Теперь попробуем разобраться, какое условие на код надо наложить, чтобы объединение отрезков образовало один цикл (а не распалось на несколько циклов). Заметим, что при движении по отрезкам их цвета чередуются следующим образом: *снснснснсн*…, где *с* – синий, а *н* – либо *к* (красный), либо *з* (зеленый). Можно считать, что мы выполняем «двойные ходы» вида «*К*» (по синему, а затем по красному отрезкам) или вида «*З*» (по синему, а затем по зеленому отрезкам).

Занумеруем клетки парами (i, j), где i – номер столбца (считая слева направо), а j – номер строки (считая снизу вверх). Начнем двигаться, например, с клетки $(1,2)$, выйдя из нее по синему отрезку. В какой-то момент после k «двойных ходов» мы снова впервые возвратимся в клетку $(1,2)$.

Заметим, что выполнение ходов вида «*З*» не изменяет номер строки, в которой находится король. А при выполнении ходов вида «*К*», как нетрудно видеть, номер строки изменяется следующим образом: 2–1–3–5–7–8–6–4–2–1–… (далее по циклу). Это означает, что для возвращения во вторую строку требуется сделать количество ходов вида «*К*», кратное 8. Аналогично рассуждая, покажем, что для возвращения в первый столбец требуется сделать количество ходов вида «*З*», кратное 8. В частности, k делится на 8, $k = 8m$.

Далее, вернемся к рассмотрению четырех колец красных и зеленых отрезков. Вначале мы находимся в клетке $(1,2)$,

принадлежащей первому кольцу. При выполнении двойного хода мы проходим синий отрезок, отрезок первого кольца и оказываемся на первом кольце, при выполнении еще одного двойного хода – проходим синий отрезок, отрезок второго кольца и оказываемся на втором кольце. Далее, нетрудно отследить изменение номера кольца после очередного двойного хода: 1–1–2–3–4–4–3–2–1–1–2–3–4–4–3–2–1–… и т.д.

Например, для кода «*кзкк*» последовательность двойных ходов будет иметь вид *КЗКК ККЗК КЗКК ККЗК* …, (поскольку на первом кольце остались отрезки только красного цвета, на втором – зеленого и т.д.). Итак, для возвращения в начальную клетку $(1,2)$ мы должны сделать m восьмерок двойных ходов *КЗКК ККЗК*. Но мы доказывали, что количество ходов вида «*З*» (и «*К*») должно делиться на 8. Имеем $2m \vdots 8$, т.е. $m \geq 4$, и, значит, до возвращения в клетку $(1,2)$ прошло $k = 8m \geq 32$ двойных ходов. Следовательно, начиная с клетки $(1,2)$, мы обошли все 64 клетки доски и вернулись обратно.

Другая ситуация будет с кодом «*кззк*»: здесь подходит $m = 2$, и, значит, мы возвратимся в начальную клетку после 16 двойных ходов, т.е. обойдем лишь половину клеток доски.

Из описанных соображений читатель легко усмотрит красивый критерий: объединение отрезков представляет собой один цикл тогда и только тогда, когда количество букв «*к*» (или «*з*») в кодовом слове нечетно.

Все описанные шаги можно повторить и для доски $2n \times 2n$. Точно так же рассматриваем множество синих, красных и зеленых отрезков. Они образуют n колец. По n-буквенному коду из букв «*к*» и «*з*» делаем стирания в кольцах. Условие возвращения в начальную клетку таково: количество двойных ходов «*К*» и «*З*» должно быть кратно $2n$.

А критерий того, что объединение отрезков представляет собой один цикл, будет звучать так: количество букв «*к*» (или «*з*») в коде взаимно просто с n.

«Пример», полученный И.Акуличем в его статье, соответствует коду «*зкзк*», но так как наибольший общий делитель чисел 2 и 4 отличен от 1, то маршрут распадается на два циклических маршрута.

Теперь решим еще одну интересную задачу, в которой нам снова помогут идеи, изложенные в начале этой статьи:

Какое наибольшее число поворотов может сделать хромая ладья при замкнутом маршруте по всем полям доски $2n \times 2n$?

Этот вопрос поставлен в замечательной книге Е. Гика «Необычные шахматы» для доски 8×8. В качестве ответа там приведен лишь пример с 56 поворотами (рис.7), но не доказано, что это наибольшее число. Чтобы это доказать, мы посчитаем «прямые» ходы (т.е. ходы, при которых ладья выходит из клетки в том же направлении, в котором она в эту клетку попала) и найдем их минимальное количество.

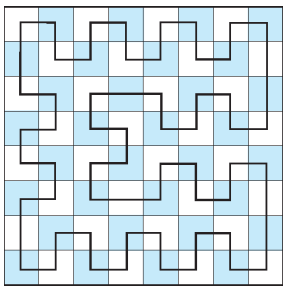


Рис. 7

Пусть есть маршрут хромой ладьи по шахматной доске. Будем рисовать путь на доске Уэлча (расположим ее для удобства так, как показано на рисунке 2), соединяя клетки ровно в том порядке, в каком ладья обходит соответствующие им клетки на обычной доске. Если ладья повернула, то на доске Уэлча предыдущую и следующую клетки соединим горизонтальным или вертикальным отрезком, а если ладья прошла по клетке, не меняя направления, то на доске Уэлча предыдущую и следующую клетки нужно соединить диагональным отрезком. В итоге на каждой из досок Уэлча получится замкнутый маршрут, представляющий собой несколько непрерывных линий из вертикальных и горизонтальных отрезков, соединенных диагональными отрезками. Общее количество диагональных отрезков на двух досках Уэлча как раз равно числу прямых ходов ладьи на обычной шахматной доске.

Но как мы уже выясняли, чтобы покрыть каждую доску Уэлча, нужно не меньше n непрерывных линий, по которым может пройти ладья. Следовательно, на каждой доске Уэлча будет не меньше n диагональных отрезков (чтобы соединить эти линии в замкнутый маршрут), всего на двух досках – не меньше $2n$, и такое же число прямых ходов будет в маршруте ладьи.

Это рассуждение справедливо для любого четного n. Если же n нечетно, то оно немного неточное. Дело в том, что диагональный отрезок соединяет одноцветные клетки доски Уэлча. Вспомним, что на доске Уэлча после проведения отрезка AB, разделяющего ее пополам, мы нашли не менее n линий или их частей с белыми концами и не менее n линий или их частей с черными концами. Всего тем самым будет $2n$ белых и $2n$ черных концов (если линия состоит всего из одной точки, мы все равно будем считать, что у нее два конца). Склейки могут происходить в n местах, причем склеиваются всегда разноцветные концы. Значит, на доске Уэлча у получившихся после склейки линий будет всего как минимум n белых концов и как минимум n черных концов. Диагональные отрезки разбивают концы одного цвета на пары, и, поскольку n нечетно, на доске Уэлча найдется как минимум $n + 1$ концов каждого цвета. Поэтому диагональных отрезков на одной доске Уэлча будет не меньше чем $\frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} = n+1$, а на двух досках – не меньше чем $2n + 2$. Значит, потребуется не меньше $2n + 2$ прямых ходов ладьи на обычной доске.

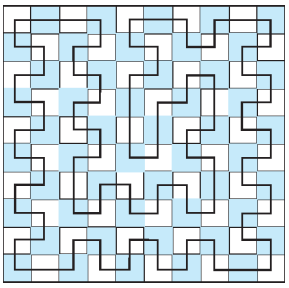


Рис. 8

На рисунке 8 изображен маршрут ладьи на доске 10×10 (т.е. для $n = 5$) с 12 поворотами. Его легко перенести на доски большего размера.

В заключение предлагаем такую задачу:

Пусть A – число замкнутых обходов хромой ладьей доски $2n \times 2n$, содержащих наибольшее число поворотов, B – число замкнутых обходов «хромой» ладьей доски $4n \times 4n$, содержащих наименьшее число поворотов. Докажите, что $B \geq 2A$.

Указание: разбейте доску $4n \times 4n$ на квадраты 2×2.

Автору неизвестно, не обращается ли неравенство этой задачи всегда в точное равенство. Вся надежда на читателей.