תרגיל באינדוקציה

(1) עבור אילו ערכי n טבעיים מתקיים אי השיוויון: $2^n > n^3$?

(2) הוכיחו את אי השוויון הבא:

$$2\left(\sqrt{n+1}-1\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n}-1$$

(3) (א) מגדירים סדרה לפי הנוסחה הרקורסיבית $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, ותנאי הקצה $a_0 = 0, a_1 = 1$. הוכיחו: $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \frac{a_n a_{n+1}}{2}$.

(ב) מגדירים את סדרת פיבונאצ'י לפי הנוסחה הרקורסיבית $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ותנאי הקצה $f_0 = 0, f_1 = 1$. הוכיחו: $\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} f_{4k+1} = \frac{2^{-n}}{3} f_{4n+4}$.

(4) מסביב לשולחן עגול n אבירים מקיימים ישיבות. בכל בוקר הקוסם מרלין מושיב אותם בסדר כלשהו לפי בחירתו (כל יום בסדר אחר). החל מהיום השני הוא מרשה להם לבצע כל כמות של תמורות מהסוג הבא: שני אבירים שיושבים זה ליד זה מתחלפים במקומות, בתנאי שהם לא ישבו אחד ליד השני ביום הראשון. האבירים מנסים להחליף מקומות כך שהסדר שלהם יהיה זהה לסדר הישיבה שלהם באחד הימים הקודמים. כאשר הם יצליחו לעשות זאת, הישיבות יגמרו. מהו מספר הישיבות המקסימלי שמרלין מסוגל לארגן? (סדר ישיבה ששונה מסדר ישיבה אחר בסיבוב בלבד נחשב אותו סדר. מרלין לא יושב ליד השולחן.)

(5) שלושים ושלושה אבירים רוכבים לאורך שביל מעגלי נגד כיוון השעון. האם ייתכן שהם רוכבים במשך זמן בלתי מוגבל עם מהירויות שונות (אך קבועות), אם על השביל יש רק נקודה אחת שבה הם יכולים לעקוף זה את זה?

(6) הוכח את אי-שיוויון הממוצעים:

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_i} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_i}{n}$$

לכל $0 \leq a_1, \ldots, a_n$.

(7) אנה ובני משחקים משחק. על השולחן יש ערמה של n אבנים. בתורה הראשון, אנה לוקחת כמה אבנים שהיא רוצה (אבל לא את כולן). כעת הם לוקחים אבנים לסירוגין, כאשר אם בתור הקודם נלקחו k אבנים, לשחקן שכעת תורו מותר לקחת מספר כלשהו של אבנים בין 1 ל-$2k-1$. מפסיד מי שלא יכול לבצע את תורו (כי אין אבנים על השולחן).

(א) עבור אילו ערכים של n ינצח כל אחד?

(*ב) כעת משנים את חוקי המשחק, כך שאחרי שנלקחו k אבנים מותר לקחת מספר בין 1 ל-$2k$. עבור אילו ערכים של n ינצח כל אחד כעת?

(8) במדינה מסוימת סוחרים בחול זהב וחול פלטינה. ניתן להחליף זהב בפלטינה ולהפך לפי שער שנקבע על ידי מספרים טבעיים g ו-p באופן הבא: x גרמים של חול זהב הינם שווי ערך ל-y גרמים של חול פלטינה אם $xg = yp$ (המספרים x ו-y לא חייבים להיות שלמים). בהתחלה לבנקאי יש קילו של חול זהב וקילו של חול פלטינה ו-$g = p = 1001$. המדינה מבטיחה להקטין בכל יום את אחד מהמספרים g ו-p ב-1, כך שבעוד 2000 ימים שניהם יהיו שווים ל-1, אך הסדר בו יתבצעו השינויים אינו ידוע מראש. האם הבנקאי יכול לבצע החלפות כל יום, כך שבסוף יהיו לו בוודאות לפחות 2 קילו מכל סוג חול?

בתיאבון!