ישנם 5 סוגי מרחק: $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{5},\ \sqrt{10},\ \sqrt{13}$.

נשווה את הרווים בין המרחקים: $\sqrt{2}-1,\ \sqrt{5}-\sqrt{2},\ \sqrt{10}-\sqrt{5},\ \sqrt{13}-\sqrt{10}$.

מבחינת סדר גודל של המספרים $\sqrt{2}$ קצת פחות מ-1.5, $\sqrt{5}$ קצת גדול מ-2, $\sqrt{10}$ קצת גדול מ-3, $\sqrt{13}$ באזור 3.5. מכאן אפשר לנחש גם בלי מחשבון

$\sqrt{2}-1$ קצת פחות מחצי,

$\sqrt{5}-\sqrt{2}$ פחות מ-1

$\sqrt{10}-\sqrt{5}$ כמעט אחד,

$\sqrt{13}-\sqrt{10}$ קצת פחות מחצי.

למה 1. $\sqrt{2}-1>\sqrt{13}-\sqrt{10}>\sqrt{5}-\sqrt{2}>\sqrt{10}-\sqrt{5}$.

מסקנה. $\sqrt{5}-1>\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1>\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{10}-\sqrt{5}>\sqrt{13}-\sqrt{10}+\sqrt{10}-\sqrt{5}=\sqrt{13}-\sqrt{5}$.

הוכחת הלמה.

(1) $\sqrt{13}-\sqrt{10}>\sqrt{2}-1$

נעלה בריבוע: $13+10-2\sqrt{130}>2+1-2\sqrt{2}$

$$20>2\sqrt{130}-2\sqrt{2}$$

$$10>\sqrt{130}-\sqrt{2}$$

$$100>130+2-2\sqrt{260}$$

$$2\sqrt{260}>32$$

$$\sqrt{260}>16$$

$$260>256$$

וזה ברור.

(2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}>\sqrt{13}-\sqrt{10}$

נעלה בריבוע: $5+2-2\sqrt{10}>13+10+2\sqrt{130}$

$$2\sqrt{130}-2\sqrt{10}>16$$

$$\sqrt{130}-\sqrt{10}>8$$

$$\sqrt{130}-\sqrt{10}>8$$

$$130+10-20\sqrt{13}>64$$

$$76>20\sqrt{13}$$

$$19>5\sqrt{13}$$

$$361>25\cdot 13=260+65=325$$

וזה ברור.

$$\sqrt{10}-\sqrt{5}>\sqrt{5}-\sqrt{2} \qquad (3)$$

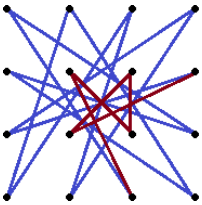
$$\sqrt{10}+\sqrt{2}>2\sqrt{5}$$
$$10+2+4\sqrt{5}>20$$
$$4\sqrt{5}>8$$
$$\sqrt{5}>2$$

וזה ברור לקיפוד.

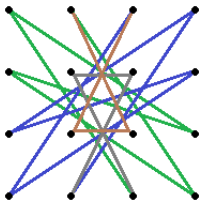
הגדרה חשובה. קטע ארוך הוא $\sqrt{10}$ או יותר.

מוטיבציה להגדרה. הרווח בין $\sqrt{5}$ לבין $\sqrt{10}$ הוא הארוך ביותר.

לקטע ארוך אין קצה במרכז. לכן יש לפחות 5 קטעים קצרים (אחרת כל הנקודות במרכז מחוברות זו אם זו). לכן יש לכל היותר 11 קטעים ארוכים. אבל אם כן, חייבים לעבור את כל הנקודות המרכזיות ברצף, וזה באמצעות קטעים די קצרים.



ניתן לעשות 11 קטעים ארוכים, שמתוכם 7 פעמים $\sqrt{13}$ ועוד 4 פעמים $\sqrt{10}$, ואז מהמרכז ניתן ליצור רק פעמיים $\sqrt{5}$, ויש 3 מהלכים שנמצאים בתוך המרכז שרק 2 מהם יכולים להיות $\sqrt{2}$ ויש אחד לפחות שהוא 1.



לעומת זאת, אם רוצים לעשות 8 פעמים $\sqrt{13}$, אז אפשר להוסיף רק פעמיים $\sqrt{10}$, ממשבצות המרכז אפילו 4 פעמים קטעים של $\sqrt{5}$, אבל משיקולי זוגיות חייבים לסיים את זה בשני אחדים לכל היותר.

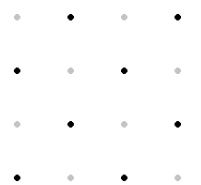
נשווה את שתי הדוגמאות: מה יותר גדול,

$$7\sqrt{13}+4\sqrt{10}+2\sqrt{5}+2\sqrt{2}+1 \text{ או } 8\sqrt{13}+2\sqrt{10}+4\sqrt{5}+2$$
$$2\sqrt{10}+2\sqrt{2} \text{ או } \sqrt{13}+2\sqrt{5}+1$$
$$40+8+16\sqrt{5} \text{ או } 13+20+1+4\sqrt{65}+4\sqrt{5}+2\sqrt{13}$$
$$14+12\sqrt{5} \text{ או } 4\sqrt{65}+2\sqrt{13}$$
$$7+6\sqrt{5} \text{ או } 2\sqrt{65}+\sqrt{13}$$
$$49+180+84\sqrt{5} \text{ או } 260+13+52\sqrt{5}$$
$$32\sqrt{5} \text{ או } 44$$
$$8\sqrt{5} \text{ או } 11$$

וברור שהימני גדול יותר, הרי $\sqrt{5}>2$.

(בעצם, ההבדל הוא מאוד קטן, הרי כל העלאה בריבוע במגדילה את הפערים.)

נושא חשוב בשאלה זו זה זוגיות. ניתן לצבוא את הקודקודים בשני צבעים, שחור ולבן, בצביעת שח. הקפיצות באורך $1,\sqrt{5},\sqrt{13}$ (נקרא לזה קפיצות אי-זוגיות) תמיד מחליפים צבע, והקפיצות באורך $\sqrt{2},\sqrt{10}$ (נקרה לזה קפיצות זוגיות) תמיד שומרים על הצבע. קל לראות שבכל מסלול סגור יש מספר זוגי של קפיצות אי-זוגיות.



על מנת להוכיח שהאפשרות א' היא האפשרות הטובה ביותר, לא נוכל להימנע מבדיקת מקרים. נסווג את המקרים בהתאם לכמות של קטעים ארוכים, ואחרי זה לפי כמות של קטעים ארוכים ממש (כלומר $\sqrt{13}$).

אפשרות	א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	י	כ
ארוכים	11	10	11	10			9		8		≤ 7
$\sqrt{13}$	7	8	≤ 7	8	7	≤ 6	8	7	8	≤ 7	
$\sqrt{10}$	4	2	≥ 4	2	3	≥ 4	1	2	0		
$\sqrt{5}$	2	4	?	≤ 4	≤ 4		≤ 4		≤ 4		
$\sqrt{2}$	2	0	≥ 2								
1	1	2	≥ 1								

למה 2. אם יש 11 קטעים ארוכים, אז יש קטע באורך 1, ויש לפחות 3 קטעים באורך שלא עולה על $\sqrt{2}$. במילים אחרות, יש 3 קטעים שסכומם לכל היותר $1+2\sqrt{2}$.

הוכחת למה 1. אם יש 11 קטעים, אז כל המהלכים שקשורים למרכז הלוח באים ברצף. יש לפחות 5 כאלה, מתוכם 3 הם בתוך מרכז הלוח. כל 3 מהלכים האלה (שמתחילים ומסתיימים במרכז) הם לכל היותר $\sqrt{2}$, אבל כל פעם שזה באמת $\sqrt{2}$, הצבע נשמר. לכן לפחות פעם אחד מופיע קטע באורך 1, הרי לא כל הנקודות במרכז הלוח באותו צבע.

למה 3. כל קטע שמחובר למרכז הלוח, אורכו לכל היותר $\sqrt{5}$.

הלמה הזאת ברורה (אז לא נוכיח אותה), אבל מאוד חשובה.

ג. מטענות 1 ו-2 מתקבל, שכאשר יש 11 קטעים ארוכים, אז יש 5 קטעים שסכומם אורכיהם הוא $1+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}$ לכל היותר מקודם ראינו שאם יש 8 קטעים של $\sqrt{13}$, אז יש לכל היותר 2 קטעים ארוכים נוספים. לכן האורך הכולל הוא לכל היותר

$$1+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+4\sqrt{10}+7\sqrt{13}.$$

אבל זה אורך שכבר קיבלנו באפשרות א'.

ד. יש 8 קטעים ארוכים ממש, ועוד 2 קטעים ארוכים. זה כבר מחבר את כל נקודות בשפה לשני רצפים, שאחד מהם מתחיל ומסתיים בנקודה שחורה, והשני מתחיל ומסתיים בנקודה

לבנה. כל קטע נוסף באורך $\sqrt{5}$ חייב להתחיל או להסתיים בשפה. אבל בשפה יש רק 4 נקודות שאפשר להתחבר אליהם, לכן יש לכל היותר 4 קטעים באורך $\sqrt{5}$. אם יש בדיוק 4 קטעים באורך $\sqrt{5}$, אז כל הקטעים האלה צריכים להתחבר לנקודות שונות בשפה, לכן הם צריכים להתחבר רק למרכז. במקרה זה משיקולי זוגיות, חייבים להעביר עוד שני קטעים באורך 1 (כי יש כרגע שני רצפים, אחד עם קצוות שחורים והשני עם קצוות לבנים) וצריכים לחבר אותם במרכז. אז נקבל היקף כמו באפשרות ב' שכבר בדקנו.

אבל, יכול להיות שאין לנו 4 קטעים של $\sqrt{5}$.

אם יש בדיוק 3 קטעים של $\sqrt{5}$, אז לא כל הקטעים האחרים הם $\sqrt{2}$ משיקולי זוגיות. אז צריכים לפחות קטע אחד באורך 1.
לכן האורך הכולל הוא לכל היותר $8\sqrt{13}+2\sqrt{10}+3\sqrt{5}+2\sqrt{2}+1$.
זה פחות טוב מאפשרות ב' אפילו, כלומר מ-$8\sqrt{13}+2\sqrt{10}+4\sqrt{5}+2$, הרי לפי למה 1, $\sqrt{5}-\sqrt{2}>\sqrt{2}-1$, כלומר $\sqrt{5}+1>2\sqrt{2}$.
אם יש 2 או פחות קטעים באורך $\sqrt{5}$, אז האורך לכל היותר
$$8\sqrt{13}+2\sqrt{10}+2\sqrt{5}+4\sqrt{2}$$
וזה גם פחות טוב מאפשרות ב'.

כך סיימנו אפשרות ד'. בכל מקרה, כאשר יש 10 קטעים ארוכים בדיוק, אז עוברים על השפה בשני רצפים בדיוק, לכן על השפה יש רק ארבע קצוות שאפשר עוד להתחבר אליהם, לכן יש לכל היותר 4 קטעים באורך $\sqrt{5}$.

ה. אם יש 7 פעמים $\sqrt{13}$, ועוד 3 פעמים $\sqrt{10}$, אז אם יש 4 פעמים $\sqrt{5}$ משיקולי זוגיות יש לפחות קטע אחד באורך 1, ואם יש 3 פעמים $\sqrt{5}$ אז מבחינת זוגיות יכול להיות שכל הקטעים האחרים הם $\sqrt{2}$. אבל לפי למה 1 מתקיים $\sqrt{5}-\sqrt{2}>\sqrt{2}-1$, לכן המקסימום שאנחנו יכולים להגיע במקרה זה הוא $7\sqrt{13}+3\sqrt{10}+4\sqrt{5}+\sqrt{2}+1$.
אבל כבר קיבלנו באפשרות א' את $7\sqrt{13}+4\sqrt{10}+2\sqrt{5}+2\sqrt{2}+1$, וזה יותר טוב:
הרי $\sqrt{10}-\sqrt{5}>\sqrt{5}-\sqrt{2}$ (לפי למה 1).

ו. נניח כי יש 10 קטעים ארוכים, מתוכם לכל היותר 6 פעמים $\sqrt{13}$, לכן לפחות 4 פעמים $\sqrt{10}$. לפי טיעון שכבר הסברנו, יש לכל היותר 4 פעמים $\sqrt{5}$. לכן סכום הכולל במקרה זה הוא לכל היותר $6\sqrt{13}+4\sqrt{10}+4\sqrt{5}+2\sqrt{2}$. לעומת אפשרות א' זה כמו $2\sqrt{5}$ לעומת $\sqrt{13}+1$. אבל $\sqrt{13}+1$ גדול יותר לפי מסקנה מלמה 1.

ובכן, סיימנו עם המקרים של 10 קטעים ארוכים.

ז. אם יש 8 קטעים של $\sqrt{13}$ וקטע אחד של $\sqrt{10}$, אז יש לכל היותר 4 קטעים של $\sqrt{5}$, ולכן 3 קטעים קצרים ביותר הם לכל היותר $\sqrt{2}$. כלומר במקרה זה נקבל מקסימום

$$8\sqrt{13}+\sqrt{10}+4\sqrt{5}+3\sqrt{2}$$

נראה שזה פחות טוב מאפשרות א'.

$$8\sqrt{13}+\sqrt{10}+4\sqrt{5}+3\sqrt{2}<7\sqrt{13}+4\sqrt{10}+2\sqrt{5}+2\sqrt{2}+1$$
$$\sqrt{13}+2\sqrt{5}+\sqrt{2}<3\sqrt{10}+1$$
$$\sqrt{13}-\sqrt{10}+\sqrt{2}-1<2\left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)$$

וזה מיידי מלמה 1.

ח. נניח שיש אם יש 9 קטעים ארוכים, שמתוכם 7 או פחות הם $\sqrt{13}$. הקטעים הארוכים מאחדים את 12 נקודות השפה ל-3 רצפים. לכן לכל היותר יש 6 קטעים באורך $\sqrt{5}$, כי כל קטע כזה צריך להתחבר לרצף שעובר בקצה. אבל $6+9=15$, לכן לקטע הקצר ביותר האורך הוא $\sqrt{2}$ לכל היותר.

לכן אורך הקו במקסימום הוא $7\sqrt{13}+2\sqrt{10}+6\sqrt{5}+1$.

טענתנו היא שזה פחות טוב מאפשרות א'.

$$7\sqrt{13}+2\sqrt{10}+6\sqrt{5}+1<7\sqrt{13}+4\sqrt{10}+2\sqrt{5}+2\sqrt{2}+1$$
$$4\sqrt{5}<2\sqrt{10}+2\sqrt{2}$$
$$2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)<2\left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)$$

וזה מיידי לפי למה 1.

כעת סיימנו מקרים של 9 קטעים ארוכים או יותר.

ט. אם יש 8 קטעים של $\sqrt{13}$ ואין קטעים של $\sqrt{10}$, יש לכל היותר 4 קטעים של $\sqrt{5}$, ולכן 4 קטעים קצרים ביותר הם לכל היותר $\sqrt{2}$. כלומר במקרה זה נקבל מקסימום

$$8\sqrt{13}+4\sqrt{5}+4\sqrt{2}$$

נראה שזה פחות טוב מאפשרות ב'.

$$8\sqrt{13}+4\sqrt{5}+4\sqrt{2}<8\sqrt{13}+2\sqrt{10}+4\sqrt{5}+2$$
$$4\sqrt{2}<2\sqrt{10}+2$$
$$2\left(\sqrt{2}-2\right)<2\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$$

וזה ברור.

י. אם יש 8 קטעים ארוכים, ומתוכם לא יותר מ-7 הם $\sqrt{13}$. אז בלי חשיבה מעמיקה ברור שהאורך הוא לכל היותר $7\sqrt{13}+\sqrt{10}+8\sqrt{5}$.
נראה שזה פחות טוב מאפשרות א'.

$$7\sqrt{13}+\sqrt{10}+8\sqrt{5}<7\sqrt{13}+4\sqrt{10}+2\sqrt{5}+2\sqrt{2}+1$$
$$6\sqrt{5}<3\sqrt{10}+2\sqrt{2}+1$$
$$6\sqrt{5}-1<3\sqrt{10}+2\sqrt{2}$$

שני האגפים חיוביים, לכן זה לא משנה אם נעלה בריבוע.

$$180+1-12\sqrt{5}<90+8+24\sqrt{5}$$
$$83<36\sqrt{5}$$
$$2+\frac{11}{36}<\sqrt{5}$$
$$4+\frac{11}{18}+\frac{11}{36^2}<5$$
$$\frac{11}{18}+\frac{11}{36^2}<1$$
$$\frac{11}{36^2}<\frac{7}{18}$$
$$11<7\cdot 2\cdot 36$$

וזה ברור לקיפוד.

כ. המקרה האחרון: יש לכל היותר 7 קטעים ארוכים. הערכה מיידית על מקסימום האורך היא $7\sqrt{13}+9\sqrt{5}$.
וגם זה פחות טוב מהאפשרות הקודמת שבדקנו $7\sqrt{13}+\sqrt{10}+8\sqrt{5}$ שזה פחות טוב מאפשרות א'

ובכן, הראנו שאפשרות א' שהאורך בה $7\sqrt{13}+4\sqrt{10}+2\sqrt{5}+2\sqrt{2}+1$ היא יותר טובה מכל אפשרות אחרת, וגם בנינו כזה מסלול.