נוסחאות במשולש

היום נכתוב נוסחאות שקשורות למשולש. לכל נוסחה שנכתוב יש הסבר קצר ואלגנטי, שבו יש מספר קטן של נוסחאות. לפעמים יותר קשה למצוא כזה הסבר מאשר לחשב, כי אז צריך למצוא תמונה שנותנת דרך לראות את הדברים בצורה פשוטה. יחד אם זאת, למצוא הסבר פשוט זה ערך חשוב.

כרגיל, נסמן α,β,γ זוויות של משולש, a,b,c ארכי הצלעות, R רדיוס המעגל החוסם, r רדיוס המעגל החסום, p חצי-היקף, $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$ קטעי השקה, r_a,r_b,r_c רדיוסי מעגלים חסומים מבחוץ, h_a,h_b,h_c הגבהים, O מרכז מעגל החוסם, H מפגש הגבהים, I מרכז מעגל חסום, I_a מפגש מעגל החסום מבחוץ.

1. הוכיחו כי $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$.

2. הוכיחו כי $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$.

3. הוכיחו כי $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$.

4. הוכיחו כי $r=4R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$.

5. הוכיחו כי $p=4R\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$.

6. הוכיחו כי $r=p\cdot\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}$.

7. הוכיחו כי $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=\frac{1}{(\cot\alpha+\cot\beta)(\cot\alpha+\cot\gamma)(\cot\beta+\cot\gamma)}$.

8. הוכיחו כי $1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$.

9. הוכיחו כי $\frac{r_a+r_b}{r_c}+\frac{r_a+r_c}{r_b}+\frac{r_b+r_c}{r_a}=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$.

10. מצאו המשמעות הגיאומטרית של $\sqrt{1-\frac{yz}{bc}}$.

11. הוכיחו כי $h_a=2R(\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma)$.

12. הוכיחו כי $\frac{OH^2}{R^2}=1-8\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$.

13. הוכיחו כי (א) $OI^2=R^2-2Rr$, (ב) $OI_a^2=R^2+2Rr_a$.

14. הוכיחו כי $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$.

15. מה יותר גדול $h_ah_bh_c$ או $r_ar_br_c$?

16. הראו כי $4R=r_a+r_b+r_c-r$.

נוסחאות לשטח משולש

$$S=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{a\cdot b\cdot \sin\gamma}{2}=\frac{abc}{4R}=\sqrt{\frac{R}{2}\cdot h_a h_b h_c}=$$

$$=2R^2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=\frac{R^2}{2}\left(\sin\left(2\alpha\right)+\sin\left(2\beta\right)+\sin\left(2\gamma\right)\right)=$$

$$=pr=xr_a=yr_b=zr_c=\sqrt{xyzp}=\sqrt{r\,r_a r_b r_c}=\frac{1}{4}\sqrt{\sum_{cyc}\left(2a^2b^2-a^4\right)}=$$

$$=r^2\cot\tfrac{\alpha}{2}\cdot\cot\tfrac{\beta}{2}\cdot\cot\tfrac{\gamma}{2}=p^2\tan\tfrac{\alpha}{2}\cdot\tan\tfrac{\beta}{2}\cdot\tan\tfrac{\gamma}{2}=$$

$$=r_a^2\cot\tfrac{\alpha}{2}\cdot\tan\tfrac{\beta}{2}\cdot\tan\tfrac{\gamma}{2}=x^2\tan\tfrac{\alpha}{2}\cdot\cot\tfrac{\beta}{2}\cdot\cot\tfrac{\gamma}{2}=$$

$$=r^2\left(\cot\tfrac{\alpha}{2}+\cot\tfrac{\beta}{2}+\cot\tfrac{\gamma}{2}\right)=r_a^2\left(\cot\tfrac{\alpha}{2}-\tan\tfrac{\beta}{2}-\tan\tfrac{\gamma}{2}\right)$$