ספירה כפולה

1. הוכיחו כי $\sum k(n-k)=\sum_{k\le n}\frac{k(k+1)}{2}$.

2. (אורנג') במדינה מסוימת יש 5 ערים גדולות ו-19 ערים קטנות (עיר גדולה זו עיר שיש בה מעל מיליון תושבים). המדינה מחולקת ל-9 אזורים. מכל עיר גדולה יש קווי אוטובוס ישירים ל-14 ערים אחרות לפחות. מכל עיר קטנה יש קווי אוטובוס ישירים ל-3 ערים אחרות לכל היותר. כל קווי האוטובוס במדינה הם קווים דו כיווניים. הוכח שיש אזור בו אין אף שני ערים שמקושרות על ידי קו אוטובוס ישיר.

3. חשב את: $\sum_{k\le 1000}\left[\sqrt[3]{k}\right]$.

4. (תחרות הערים) על השולחן מונחים שני דפים וערימת מטבעות כסף. בכל צעד מבצעים את אחת משתי הפעולות הבאות:
- מוסיפים לערימה מטבע זהב אחד וכותבים את מספר מטבעות הכסף בדף הראשון
- מסירים מהערימה מטבע כסף אחד וכותבים את מספר מטבעות הזהב בדף השני.
בסופו של דבר על השולחן נותרו רק מטבעות זהב. הוכיחו כי ברגע זה סכום כל המספרים בדף הראשון שווה לסכום כל המספרים בדף השני.

5. (גיליס) בממשלה של מדינה זרה 12 שרים. לכל שר יש 5 חברים ו-6 אויבים בממשלה. כל 3 שרים מרכיבים ועדה. ועדה נקראת מתוקנת אם כל חבריה חברים או שכל חבריה אויבים. כמה ועדות מתוקנות יש?

6. האם קיים פאון קמור שבו בכל פאה יש לפחות 6 קודקודים?

7. ספרים מסודרים ב- K מדפים. סידרו אותם מחדש ב- K + 1 מדפים.
הוכח שיש ספר עבורו במדף החדש יש פחות ספרים מאשר במדף הקודם.
תרגיל המשך: הוכח שיש 2 ספרים כאלו.

8. הוכיחו כי בכל מצולע שקודקודיו שלמים ואף צלע שלו לא מקבילה לקווי רשת, סכום אורכי קטעי הרשת האופקיים שמוכלים במצולע שווה לסכום אורכי קטעי הרשת האנכיים שמוכלים במצולע.

9. (IMO) בתחרות מסוימת יש n (אי-זוגי) שופטים, ו- m מתחרים. כל שופט נותן ציון לכל מתחרה, וכל ציון הוא 1 או 0. k הינו מספר ההסכמים המרבי בין כל זוג שופטים. הוכח כי $\frac{n-1}{2n}\le\frac{k}{m}$.

10. (IMO) בהינתן $1\le r\le n$, נתבונן בכל תתי-הקבוצות בגודל r של $\{1,2,...,n\}$, ובכל תת-קבוצה נמצא את הערך המינימלי. חשבו את הממוצע של הערכים האלה.

11. (גרוסמן 2011) מדינת טריגוניה רוצה לשלוח צוותי הצלה ליפן בעקבות רעידת האדמה. בכל צוות צריך להיות רופא, אחות וכבאי. לרשות המארגנים עומדים 10 רופאים, 10 אחיות ו-10 כבאים. מסיבות שונות לא כל בחירה של (רופא, אחות, כבאי) אפשרית. המארגנים מנו את כל השלשות שהן כן אפשריות, וגילו שיש 501 כאלה. הוכיחו שאפשר לשלוח לפחות 6 צוותים.

12. (אורנג') יש 13 מנורות במעגל. מתחת לכל מנורה יש מתג שמשנה מצב של 3 מנורות סמוכות עליו. בהתחלה יש מצב כלשהו של מנורות. צריך לשנות מצבי מתגים כדי שבסוף יהיה דלוקה מנורה אחת (כלשהי). מהו המספר המרבי של שינויי מתגים שצריך לעשות?