תורת המרדף

בעיית אפולוניוס. חורפן נקודתי רעב רודף אחרי עכבר נקודתי שרוצה לחיות. מהירות החורפן גדולה ממהירות העכבר. תוך כמה זמן יתפוס החורפן את העכבר?
א. עכבר עיוור שרץ בקו ישר.
ב. עכבר רואה.
ג. קבוצת מוות.
ד. קבוצת חיים.
ה. עכבר ערמומי.

בעיית הנהג הרוצח:
א. רציף: במישור נמצאים הולך רגל ומכונית, אבל המכונית לא יכולה לפנות מהר.
ב. דיסקרטי: לוח משבצות אינסופי. משחקים בתורות. הולך הרגל הולך בכל מהלך שלו למשבצת סמוכה לפי צלע. המכונית עושה בכל מהלך שני מהלכים כאלה שהם באותו כיוון, שהוא זהה לכיוון של המהלך הקודם או ימינה ממנו. המכונית מנצחת אם היא נמצאת במשבצת של הולך הרגל, או במשבצת סמוכה לפי קדקוד.

מטיילים שהלכו לאיבוד וצוות חיפוש.

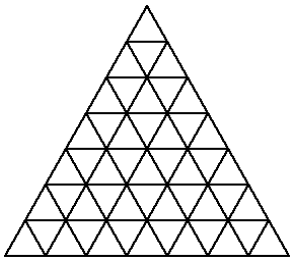
הנוצרי והאריה.

חורפן במרכז הריבוע ועכבר בפינה. עבור איזה יחס מהירויות מנצח החורפן?

מרדף א

1. נתון לוח 3×5775 ועליו
א. צריח לבן ורץ שחור
ב. צריח לבן ופרש שחור
מי אוכל את מי?

2. זבוב ועכביש משחקים על קדקודי רשת $n\times n$. הם מתחילים בפינות נגדיות. בכל מהלך כל אחד עובר לקדקוד סמוך. האם העכביש יתפוס את הזבוב?



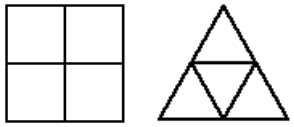
3. אותה שאלה ברשת משולשים.

4. במישור יש זאב ו-100 כבשים נקודתיות. בכל מהלך הזאב זז במרחק 1 לכל היותר, ואחר כך אחת הכבשים זזה במרחק 1 לכל היותר. האם הזאב יוכל לתפוס איזושהי כבשה?

5. א. בלוח משבצות נמצאים 3 זאבים ו-3 כבשים. בכל מהלך זאב אחד הולך למשבצת סמוכה לפי צלע, וכבשה אחת הולכת שמאלה או ימינה. האם תמיד אפשר לתפוס כבשה אחת לפחות?
ב. אותה שאלה עבור 2 כבשים ו-100 זאבים.

6. זאב נמצא במרכז ריבוע, ובכל פינה נמצא כלב. מטרת הכלבים היא שהזאב יישאר בתוך הריבוע, והזאב רוצה להימלט. הכלבים יכולים לנוע על ההיקף בלבד.
א. שני כלבים יותר חזקים מהזאב, אבל הזאב חזק מכלב אחד. הכלבים מהירים פי 1.5 מהזאב. מי מנצח?
ב. הכלבים שמנו קצת מהסעיף הקודם. כעת אפילו כלב אחד יכול לנצח זאב, אבל הכלבים זריזים מהזאב רק פי 1.4. מי מנצח?

7. אותו הסיפור, אבל הזאב זריז מהכלבים, ויש 100 כלבים, במצב התחלתי שהכלבים בוחרים. האם הזאב יצליח להימלט?



8. לכל אחת מהרשתות בציורים: בפינה אחת נמצא קוף, ובפינה אחרת נמצאים שני שומרים. הקוף מהיר פי 3 מהשומרים. האם יוכלו לתפוס אותו?

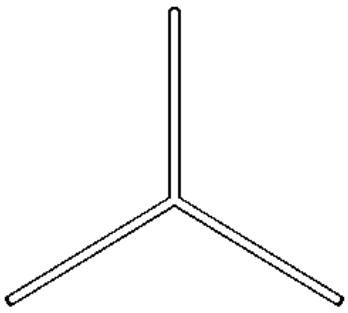
9. שאלה דומה על מקצועות של ארבעון משוכלל, אבל הקוף מהיר פי 2 מהשומרים. ומה לגבי ארבעון לא משוכלל?

10. כעת בארבעון משוכלל, נמצא עכבר שרץ על המקצועות, אשר מהיר פי 2.01 מכל אחד משני החורפנים המעופפים שנמצאים בחדר. האם הוא יוכל לשרוד?

11. א. זבוב ועכבישים זוחלים על המקצועות של קובייה תלת ממדית במהירויות שוות. כמה עכבישים צריך בשביל שבכל מצב הם יוכלו לתפוס את הזבוב?
ב. ומה אם הם זוחלים על המקצועות החד-ממדיים של קובייה n-מימדית?

12. במרכז הריבוע נמצא שוטר, באחד מקודקודיו – פושע. השוטר יכול לרוץ לאורך הריבוע, והפושע – רק על צלעותיו. השוטר מסוגל לירות לאורך צלע של ריבוע, לכן אם ברגע מסוים השוטר והפושע יהיו על צלע אחת, השוטר יצליח לתפוס אותו. עבור איזה יחס מירבי בין המהירויות שלהם ינצח השוטר?

13. פושע ושוטר נמצאים בשלושה פרוזדורים באורך ℓ כל אחד, שמתחברים בקצה המשותף של כל הפרוזדורים (כמו בציור). השוטר מסוגל לרוץ פי 2 יותר מהר מהפושע. על מנת לראות את הפושע, השוטר צריך להימצא איתו באותו הפרוזדור ובמרחק r ממנו או פחות. הוכיחו, שהשוטר יוכל לתפוס את הפושע אם א. $r > \ell/5$, ב. $r > \ell/7$.



בתיאבון!

מרדף ב'

0. במרכז הריבוע יש חורפן ובפינה עכבר. לחורפן מותר לטייל בכל שטח הריבוע, ולעכבר – רק על היקף. איזה יחס מהירויות ישביע את החורפן?

1. כעת החורפן במרכז מעגל, וכלב השמירה על המעגל. לחורפן מותר לטייל בכל המישור, ולכלב – רק על היקף המעגל. האם החורפן יוכל לברוח מהעיגול כאשר

א. $\frac{v_{\text{dog}}}{v_{\text{mink}}} = 4$? ב. $\frac{v_{\text{dog}}}{v_{\text{mink}}} = 4.5$?

2. שאלה דומה עבור ריבוע: בהתחלה החורפן במרכז הריבוע, והכלב בפינה. לחורפן מותר לטייל בכל המישור, ולכלב – רק על היקף הריבוע. האם החורפן יוכל לברוח כאשר

א. $\frac{v_{\text{dog}}}{v_{\text{mink}}} = 4$? ב. $\frac{v_{\text{dog}}}{v_{\text{mink}}} = 5$?

3. שאלה דומה עבור משולש שווה צלעות: בהתחלה החורפן במרכז המשולש, והכלב בפינה. האם החורפן יוכל להימלט כאשר

א. $\frac{v_{\text{dog}}}{v_{\text{mink}}} = 7$? ב. $\frac{v_{\text{dog}}}{v_{\text{mink}}} = 7.3$?

4. נתון ארבעון (לאו דווקא משוכלל) בחלל אינסופי תלת-מימדי. בקדקודיו מרחפים ארבעה חורפנים מעופפים, ובפנים הארבעון (לא על פאה) מרחף יונק דבש. מהירויות כל היצורים זהות. האם החורפנים יצליחו לתפוס את הציפור בזמן סופי?

5*. בעיית הנהג הרוצח הדיסקרטי: שניים משחקים בתורות על לוח משבצות אינסופי. בכל מהלך של הולך הרגל הוא הולך למשבצת סמוכה לפי צלע. בכל מהלך של המכונית, הנהג בוחר האם להמשיך באותו הכיוון כמו במהלך הקודם, או לפנות ימינה, והמכונית נעה שתי משבצות בכיוון שנבחר (בתור הראשון ניתן לבחור כל כיוון שמקביל לצלעות המשבצות). המכונית מנצחת אם היא נמצאת במשבצת של הולך הרגל, או במשבצת סמוכה לפי קדקוד. מי מנצח?

6*. על קטע $[0,1]$ נמצאת נסיכה ומפלצת. הנסיכה מסוגלת לרוץ בכל מהירות סופית. המפלצת רצה במהירות 1 לכל היותר. ברגע שהנסיכה נמצאת באותה נקודה עם המפלצת, היא נאכלת מיד. מטרת הנסיכה היא להגדיל את תוחלת החיים שלה, ומטרת המפלצת היא להקטין את תוחלת החיים שלה. כל אחד מהשחקנים בוחר את נקודת ההתחלה שלו, וכולם יודעים את חוקי המשחק, ולא רואים זה את זה. מהן האסטרטגיות האופטימאלית לשני השחקנים?

7. באוויר מרחף בייגלה, ועליו נמצאים שני עכבישים וזבוב. הזבוב שמן ולא נקודתי. לכולם מהירויות שוות. האם העכבישים יצליחו לתפוס את הזבוב?

בתיאבון!