תרגיל קופסאות

1. במשולש שווה צלעות שצלעותיו באורך 1 שמו 5 נקודות, הוכיחו או הפרך קיימות 2 נקודות (מתוך ה5) שמרחקן זו מזו הוא לכל היותר חצי.

2. מהו המספר המקסימאלי של מלכים שלא יאיימו זה על זה ניתן להציב על לוח שח? כנ"ל עבור פרשים, רצים ומלכות(*).

3. מהו המספר המינימאלי של מלכים שצריך להציב על לוח שח כך שכל המשבצות הריקות תהיינה מאוימות? כנ"ל עבור רצים(*), פרשים(**) ומלכות(***).

4. על לוח 5775×5775 יושבים זבובים (על כל משבצת זבוב אחד) ברגע מסוים כל מישהו מוחא כף וכל הזבובים קופצים למשבצת סמוכה. מה המספר המינימלי של משבצות שיכולות להישאר פנויות?

5. חלקו את המספרים בין 1 ל-100 לכמה שפחות קבוצות כך ש:
א. כל המספרים בכל קבוצה זרים.
ב. לכל זוג מספרים בכל קבוצה הקטן מחלק את הגדול.

6. כמה משבצות צריך לסמן על לוח משבצות 8×8, כך שלא יהיה ניתן למצוא בו צורה של "פינה" המורכבת מ-3 משבצות לא מסומנות?



7. נתונה צורה כלשהי במישור.
א. הוכיחו שאם שטחה קטן מ-1 אז ניתן להזיז את הצורה, כך שלאחר הזזה היא לא תכיל נקודות שלמות.
ב. הוכיחו שאם שטחה גדול מ-1 אז קיימות שתי נקודות בצורה, כך שלווקטור שמחבר אותן שתי הקואורדינאטות שלמות.

בהצלחה!