האם כל אי-שוויון הוא סכום ריבועים?

לא כל פולינום אי-שלילי הוא סכום ריבועי פולינומים.

אבל כל פולינום אי-שלילי הוא סכום ריבועי פונקציות רציונאליות (בעיה 17 של הילברט, נפתרה על ידי אמיל ארטין ב-1927).

שלבי הוכחה:

(1) מושגים חשובים: שדה סדור, שדה סגור ממשית.

(2) **משפט.** עם איבר הוא חיובי בכל סידור, אז הוא סכום ריבועים.

(3) מספיק להראות שאם פולינום הוא חיובי בכל-$\mathbb{R}^n$, אז הוא חיובי על כל שדה סדור (או מספיק אפילו סגור ממשית).

(4) שיטה של שטורם לספירת שורשים.

(5) משפט ערך הביניים עבור פולינומים מתקיים לכל שדה סגור ממשית, וגם משפט שטורם.

(6) טענה מסדר ראשון שנכונה מעל $\mathbb{R}$ נכונה מעל כל שדה סגור ממשית.