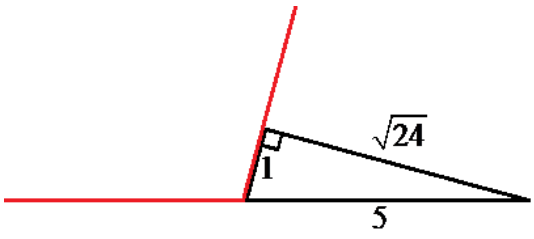
По тундре,
Вдоль железной дороги,
Где мчится поезд
Воркута-Ленинград,
Мы бежали с тобою
От проклятой погони,
Чтобы нас не настигнул
Пистолета разряд!
(שיר רוסי מפורסם שנתן השראה לשאלה)

10. משחק מתבצע על מלבן שהצלעות הגדולים שלו מכוונים ממזרח למערב והן באורך 100 ק"מ והצלעות הקטנים באורך 1 ק"מ (כדוה"א שטוח). הצד הדרומי של המלבן הוא כביש; על הכביש אפשרי לרוץ במהירות של 10 קמ"ש; יתר המלבן הוא שטח שבו אפשר להתקדם רק במהירות 2 קמ"ש. בפינה צפון-מזרחית נמצאים פושעים (נקודתיים), ובפינה דרום מזרחית (כלומר על הכביש) נמצא שוטר עם אקדח, שממנו הוא יכול לחסל פושע המצא במרחק R. כולם רואים את כולם ויודעים את כל כללי המשחק.
מטרת הפושעים היא שלפחות אחד מהם יגיע ללא פגע לצד המערבי של המלבן.
א. נניח שיש פושע אחד, $R = 50$ מטרים. האם השוטר יתפוס אותו?
ב. נניח שיש שני פושעים, $R = 400$ מטרים. האם השוטר יוכל לתפוס את שניהם?
ג. נניח שיש שני פושעים, $R = 100$ מטרים. האם השוטר יוכל לתפוס את שני הפושעים?

פתרון.

נניח שבן אדם נמצא בנקודה כלשהי של השטח, שלא ממש קרובים לגבול המערבי של השדה. אז מתקיימת טענה ונוסחה:

טענת המרחק הקצר: הדרך הקצרה ביותר מנקודה כלשהי בשטח לפינה דרום-מערבית היא קו שבור, שמורכב שני קטעים. הזווית בין הקווים קהה, ומשלימה ל-180° את הזווית האמצעית של משולש ישר זווית, שיתר שלו גדול פי 5 מהניצב בקטן שלו.



טענה דומה הוכחה בהרצאה, וגם עם שכחתם תוכלו בלי בעיה להוכיח אותה.

נוסחת המרחק: נניח שראשית הצירים היא בפינה דרום-מערבית, הכיוונים של הצירים כרגיל (x מזרחה, y צפונה). הזמן שנדרש על מנת להגיע מנקודה (x,y) ל-$(0,0)$ הוא $\frac{x+y\cdot\sqrt{24}}{10}$ (כל עוד שאף אחד לא צד את האיש).

א. נניח שיש פושע אחד, $R = 50$ מטרים. האם השוטר יתפוס אותו?

תשובה: כן.

פתרון ראשון. השוטר ישקיע $\frac{999}{1000}$ מהמהירות המרבית שלו על מנת לא להתרחק מהפושע בציר ה-x, ו-$\frac{1}{24}$ מהמהירות שלו על מנת להתקדם צפונה. זה אפשרי מכיוון ש-

$$\left(1-\frac{1}{1000}\right)^2+\left(\frac{1}{24}\right)^2=1-\frac{2}{1000}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{576}<1.$$

בזמן שהשוטר יגיעה לאותו y כמו של הפושע, הוא יעבור לכל היותר קילומטר צפונה, ובציר ה-x יתרחק ממנו הפושע במרחק 24 מטר לכל היותר. כמובן שלא תהיה אז בעיה להרוג אותו. נשים לב שפושע יוכל לעבור כ-24 קילומטרים מערבה לכל היותר עד לרגע זב, כלומר הוא לא יברח.

פתרון שני. בהתחלה השוטר ירוץ מערבה 2 קילומטר, ואז ירוץ צפונה עד שקואורדינאטת y שלו תהיה $19/20$ מ-y של הפושע. מרגע זה השוטר ינוע בציר y עם מהירות $\frac{19}{20}$ מהמהירות של הפושע לכיוון הפושע, ואת שארית המהירות ינצל על מנת להתקרב לפושע בציר x.

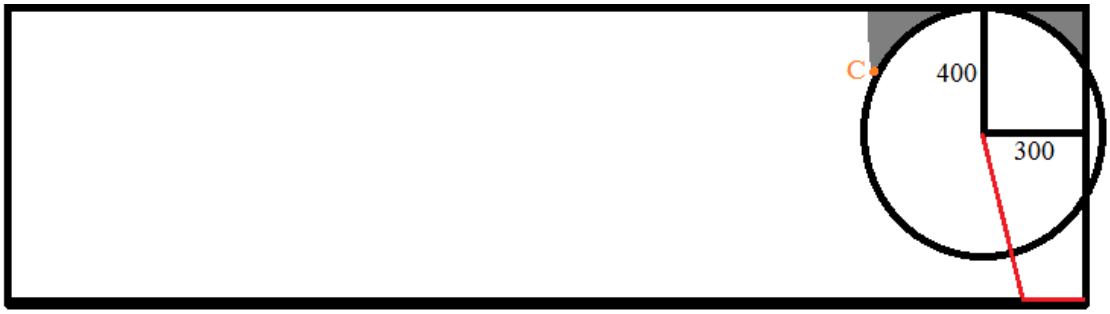
ב. נניח שיש שני פושעים, $R = 400$ מטרים. האם השוטר יוכל לתפוס את שניהם?

תשובה: כן.
פתרון. השוטר בהתחלה יגיעה בזריזות המרבית לנקודה A שנמצאת במרחק 300 מטר מהקצה המזרחי ו-400 מטר מהקצה הצפוני. לכל פושע ברגע זה (אם הוא אוהב לחיות) יש שתי אפשרויות: להיות בפינה צפון מזחית או מימין מעגל שנשלט על ידי האקדח של השוטר. לפי נוסחת המרחק, השוטר השקיע זמן ששקול לטיול באורך

$$\frac{600\cdot\sqrt{24}+300}{5}.$$

אם נשתמש באי-שוויון $\sqrt{\frac{24}{25}}=\sqrt{1-\frac{1}{25}}<1-\frac{1}{50}$, נקבל כי הפושעים עברו מרחק לכל היותר

$$\frac{600\cdot\sqrt{24}+300}{5}<600\cdot\frac{98}{100}+60=588+60=648.$$



כלומר בכל מקרה, גם אם הפושע רץ למערב, הוא נמצא במרחק 648 מטרים לכל היות מהקצה המזרחי. אז בכל מקרה, הפושע נמצא ממזרח יחסית לקצה המערבי של עיגול השליטה של השוטר.

קיימים שלושה מקרים: שני הפושעים מזרחה ביחס לשוטר (זה המקר הקל ונדלג עליו), שני הפושעים מערבה לשוטר, ופושע אחד מזרחה והשני מערבה.

נתחיל מהמקרה ששני הפושעים נמצאים בצד המערבי. השוטר ירוץ מערבה במהירות $\frac{999}{1000}$ מהמהירות המרבית, וצפונה במהירות $\frac{1}{24}$ מהמהירות המרבית. כבר עשינו חישוב בסעיף א, שמראה כי זה מסתדר עם משפט פיתגורס, וקל לראות שזה יגרום למוות של שני הפושעים במקרה זה.

נשאר המקרה שהפושע אחד בצד המזרחי, והשני בצד המערבי. נשמיד קודם את הפושע בפינה המזרחית, ואז נרדוף את הפושע המערבי. מכיוון שהפושע המערבי נשאר לבדו, אז נוכל להשתמש בשיטות לקידה מהסעיף הראשון.

השוטר נמצא במרחק 500 מהפינה הצפון-מזרחית. הוא יתקדם לכיוון הפינה 100 מטר וישמיד בוודאות את הפושע המזרחי. נחשב את המרחק מהשוטר ומהפושע שנשאר לפינה דרום-מערבית.

מכיוון שהמרחקים כולם גדולים, נחשב את המרחק בהשוואה לנקודה שנמצאת במרחק 400 מהקצה הצפוני, ו-700 מהקצה המזרחי B כלומר נקודה מערבית של תחום האקדח של השוטר בסוף של השלב הראשון, כאשר השוטר בנקודה A.

בסוף השלב הראשון הפושע נמצא במרחק 648 מהפינה הצפון מזרחית (לכל היותר) המקרה הטוב ביותר עבור הפושע זה כאשר הוא נמצא בנקודה C, שהיא נמצאת במרחק 648 מפינה צפון-מזרחית ובגבול תחום האקדח. המרחק בין C למיקום השוטר בציר ה-x הוא 348 לכל היותר. לפי משפט פיתגורס, המרחק בציר ה-y הוא לפחות

$$\sqrt{400^2-348^2}=4\cdot\sqrt{100^2-87^2}=4\cdot\sqrt{10000-6449-1120}=$$
$$=4\cdot\sqrt{2431}>40\cdot\sqrt{24}$$

המרחק מ-C לפינה דרום-מזרחית יחסית ל-B, אם כך, זה לפחות

$$\frac{52+\sqrt{24}\cdot 40\cdot\sqrt{24}}{5}=\frac{52+24\cdot 40}{5}=\frac{960+52}{5}>\frac{1000}{5}=200$$

.

אם כך, השוטר לאחר החיסול הפושע המזרחי לא יותן רחוק מהפינה הדרום מערבית מאשר הפושע + 400 מטר, לכן אם ירוץ לפינה דרום מערבית, הוא יהרוג את הפושע או שיעקוף אותו, ואז גם יוכל להרוג אותו.

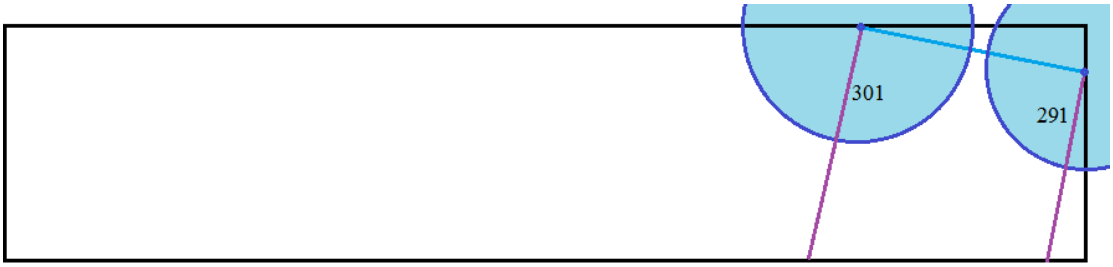
ג. נניח שיש שני פושעים, $R = 100$ מטרים. האם השוטר יוכל לתפוס את שני הפושעים?

תשובה: לא.

כמו שידוע מסעיף א', ניתן לתפוס כל אחד מהפושעים לפי בחירת השוטר. לכן מה שנשאר להוכיח, זה שבהתאם לפתגם שועלים עתיק, עם תנסה לרדוף את שני הארנבים לא תתפוס אף אחד מהם.

הפושעים צריכים לתכנן מזלג. בהתחלה הם ישתדלו להיכנס במצב, כך שהם באותו מרחק מבחינת הזמן מהפינה הדרום-מערבית, והמרחק בינם 593. על מנת להגיע למצב זה, פושע אחד ירוץ מערבה במהירות מקסימלית, והשני יתקדם דרומה פי $\sqrt{24}$ יותר לאט.

אחרי זה ניצור מסביב לכל פושע מעגל דמיוני: מסביב לפושע המזרחי מעגל שרדיוסו 291 מטרים, ומסביב לפושע המערבי מעגל שרדיוסו 301 מטרים.



קודם כל נשים לב, שעד שהפושעים יצליחו להגיע למבנה זה, השוטר לא יספיק להיכנס לאף אחד מבין המעגלים האלה. אכן, בזמן שייקח לפושע המזרחי לעבור $593\cdot\frac{\sqrt{24}}{5}$ על מנת להיכנס למבנה, השוטר יעבור לכל היותר אותו מרחק. והמרחק השוטר צריך לעבור בשביל להיכנס לנקודה הקרובה של המעגל הקרוב אליו זה $1000-291-\frac{593}{5}$, וזה יותר גדול:

$$1000-291-\frac{593}{5}>593\cdot\frac{\sqrt{24}}{5}$$

הרי $\sqrt{\frac{24}{25}}=\sqrt{1-\frac{1}{25}}<1-\frac{1}{50}$, לכן מספיק להראות

$$1000-409\frac{3}{5}>593\cdot\left(1-\frac{1}{50}\right)$$

$$590\frac{2}{5}>593-10.?$$

וזה נכון. כעת נכנסים לשלב השני של המשחק. כל עוד השוטר לא חודר לאף אחד מבין המעגלים, הפושעים צועדים מערבה. ברגע שהשוטר נכנס לאחד העיגולים (שימו לב שלא ניתן להיכנס לשני העיגולים בו-זמנית הרי העיגולים זרים) יתנהגו הפושעים כך:

שני הפושעים ימשיכו לנוע מערבה במקביל במהירות מטר לשעה, ובנוסף הפושע שהעיגול שלו חופשי משוטר ינוע במהירות $\frac{d-\frac{1}{2}}{d}$ מהמהירות של השתנות המרחק בין השוטר לבין הפושע שבמרכז העיגול שלא נמצא השוטר לפינה דרום-מערבית, כאשר $d=191$ עבור הפושע המערבי, ו-$d=201$ עבור הפושע המזרחי (כלומר $R-100$ כאשר R הוא רדיוס העיגול שאליו חדר השוטר). עם השוטר מתקרב לפושע במעגל שלו, הפושע האחר מתקרב לפינה דרום-מערבית, ואם השוטר מתרחק מהפושע במעגל שלו, הפושע האחר מתרחק מהפינה הדרום-מערבית, וכל זה בנוסף לתנועת הפושעים במהירות מטר לשעה מערבה.. מטרה של זה היא שאם השוטר יצא מהעיגול שמוגדר סביב הפושע, הפושעים חזרו למבנה של מרחק 593 מטר עם אותו שיפוע כמו בהתחלה, אבל בנקודות מערביות יותר.

נשים לב, שגם בשלב זה המשימה שהדרנו לפושעים היא אפשרית, הרי

$$\frac{d-\frac{1}{2}}{d}+2\cdot\frac{1}{1000}<1.$$

(המקדם 2 הוא מכיוון ש-$\frac{1}{1000}$ מגיעה משני מקומות: יתכן שתנועת הפושע שקרוב לעיגול שלו חדר שוטר מקרבת אותו לשוטר, ויתכן שהמשימה של הפושע האחר היא מנוגדת לתנועה מערבה.)

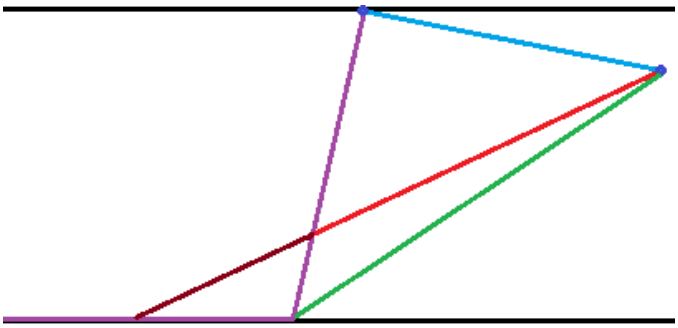
כמובן, שאם השוטר לא ינקוט במעשה כלשהו ולא יחסל אף פושע במשך מיליון שעות, שני הפושעים יברחו למערב. נניח כי בשלב מסוים השוטר הורג את אחד הפושעים. במקרה זה השני ירוץ לפינה דרום-מערבית מהר ככל האפשר בדרך המהירה ביותר.

נניח שנהרג הפושע המערבי. המזרחי ירוץ במהירות המרבית לפינה דרום מערבית בדרך המהירה ביותר. הוא כבר הרוויח לעומת הפושע האחר 200.5 מטרים, לכן לעומת השוטר יש לו יתרון של 100.5 מטרים לפחות. לכן השוטר לא יתקרב אליו לרחק ירי ולא יחסל אותו.

במקרה ההפוך, אם השוטר יתקוף את הפושע המזרחי, לפושע המערבי יהיה יתרון של 90.5 מטרים על השוטר, אבל הוא גם מערבי יותר. כלומר אם השניים שעדיין בחיים ירוצו בו-זמנית, המרחק של 90.5 מטרים שיש בינם יהפוך בפועל למרחק פי 5 יותר גדול, וזה מה שמציל אותו. אבל זו אידיאולוגיה כללית ונעבור לחישוב מפורש.

על מנת להקל על החישוב, ברגע שהפושע המזרחי נהרג, נעביר את השוטר הטלפורטציה למיקום של הפושע המנוח ונרשה לרוץ 100 מטר לפני שהפושע המערבי מתחיל לרוץ. זה כמובן רק יחמיר על הפושע. קיימים שני מקרים: או שהפושע יצליח להגיע לכביש, או שלא. נסמן נקודה שבה הפושע המערבי מגיע לכביש T.

השוטר צריך להגיע במהירות האפשרית אל נקודה שבה הוא יצליח לחסל את הפושע. אין לו שום סיבה לעזוב את הכביש אם הוא כבר יגיע לכביש, כי אם הוא יצליח להרוג את הפושע לא על הכביש, הוא היה מצליח להרוג אותו גם על הכביש. נשים לב, שאם גם השוטר וגם הפושע הגיעו לכביש, המרחק בינם הוא לפחות 450 מטרים (כי זה שכול ל-90 מטרים בשטח) ואז הפושע כבר ברח. נשים לב גם, שאם הפושע עוד לא הגיע לכביש והשוטר כבר כן, אז המרחק בין הפושע לשוטר הולך ומתקצר (גם ב-x וגם ב-y ולכן גם במרחק). אבל אם כך, השוטר יהרוג את הפושע כשהוא יגיע לכביש, וזה בלתי אפשרי כמו שהוכחנו. ובכן, השוטר לא יגיע לכביש, והוא צריך להרוג את הפושע לפני שהשוטר יגיע לכביש. לכן לשוטר כדאי להתקדם לנקודה שבה ימות הפושע האחרון בקו ישר. אם השוטר ירוץ מסלול של הכדור לגופה של הפושע, ואז במסלול היעיל ביותר של הפושע לפינה דרום-מערבים, אז הפיגור שלו אחרי המסלול של הפושע הוא פחות מ-100 מטר לפי מרחק שבשטח. הפיגור של השוטר במסלול המהיר ביותר הוא 90.5 מטר, לכן הפיגור של השוטר אם הוא עובר דרך הגופה של הפושע לעומת המסלול המהיר ביותר פחות מ-10 מטרים.



נוכיח שזה לא אפשרי.

נניח כי השוטר מחסל את הפושע כאשר הפושע כבר על הכביש. הוא רץ אל הפושע בקו האדום. החלק האחרון של המסלול (אדום כהה) לוקח יותר זמן מאשר אותו חלק לקח לפושע (כי הפושע רץ בקו היעיל ביותר), ולכן היה אפשר להקטין עוד את הפרש הזמנים בין שוטר לפושע.

בנוסף, בגלל אי-שוויון המשולש אם השוטר ירוץ במסלול אדום בהיר ואז ימשיך לכביש בקו הסגול, אז היה חוסך מרחק אם היה רץ בקו הירוק. ובכן, אם השוטר ירוץ בקו הירוק

לנקודה שבה הפושע מתכנן לצאת לכביש, אז פער בין במרחק שהשוטר צריך לעבור לבין המרחק שהפושע עובר עד אותה הנקודה אינו עולה על 10 מטרים. וכעת נחשב צלעות של משולש ישר זווית כחול-ירוק-סגול. הצלע הכחולה היא לפי הבנייה 593 מטרים. הצלע הסגולה היא $1000\cdot\frac{5}{\sqrt{24}}$ מרקים. לכן לפי משפט פיתגורס, הצלע הירוקה היא $\sqrt{\frac{5000^2}{24}+593^2}$. על מנת שהשוטר יצליח, צריך שההפרש בין צלע ירוקה לצלע סגולה של המשולש לא תעלה על 10 מטרים. כלומר

$$\sqrt{\frac{5000^2}{24}+593^2}<10+\frac{5}{\sqrt{24}}\cdot 1000$$

$$\frac{5000^2}{24}+593^2<\frac{5000^2}{24}+100+\frac{100000}{\sqrt{24}}$$

$$250000=500^2<593^2<100+\frac{100000}{\sqrt{24}}<200000$$

וזו סתירה.