Задача. Доказать, что

$$4^s\binom{s+2}{2} = \sum_{\substack{a+b+c+d=s\\ a,b,c,d\geq 0}} 2^a\binom{b+3}{3}\binom{2s-1-a}{c}\binom{5}{d}$$

для всех $s \geq 1$.

Решение. Умножим левую и правую часть равенства на q^s и сложим по всем $s = 1, 2, \ldots$. Слева получим

$$\sum_{s=1}^{\infty} 4^s\binom{s+2}{2} = (1-4s)^{-3} - 1.$$

Справа имеем

$$\sum_{\substack{a+b+c+d=s\\ a,b,c,d\geq 0}} 2^a\binom{b+3}{3}\binom{2s-1-a}{c}\binom{5}{d}q^s = \sum_{a,b,d=0}^{\infty} 2^a\binom{b+3}{3}\binom{5}{d}q^{a+b+d}C_{a+2b+2d-1}(q),$$

где

$$C_t(q) = \sum_{c=0}^{\infty}\binom{2c+t}{c}q^c.$$

Функция $C_t(q)$ — производящая функция для прямой, параллельной главной диагонали треугольника Паскаля. Она равна

$$C_t(q) = ((1-(1-4q)^{1/2})/2q)^t(1-4q)^{-1/2}.$$

Коэффициент $(1-4q)^{-1/2}$ можно вынести, и правая часть исходного равенства, умноженная на $(1-4q)^{1/2}$, равна

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b,d=0}^{\infty} 2^a\binom{b+3}{3}\binom{5}{d}q^{a+b+d}((1-(1-4q)^{1/2})/2q)^{a+2b+2d-1}\\
&= \sum_{b,d=0}^{\infty}\binom{b+3}{3}\binom{5}{d}q^{b+d}((1-(1-4q)^{1/2})/2q)^{2b+2d-1}\sum_{a=0}^{\infty}2^aq^a((1-(1-4q)^{1/2})/2q)^a\\
&= (1-4q)^{1/2}\sum_{b,d=0}^{\infty}\binom{b+3}{3}\binom{5}{d}q^{b+d}((1-(1-4q)^{1/2})/2q)^{2b+2d-1}
\end{aligned}$$

Дальнейшее вычисление проходит аналогичным образом. Нужно сосчитать

$$\sum_{b=0}^{\infty}\binom{b+3}{3}q^b((1-(1-4q)^{1/2})/2q)^{2b}$$

и

$$\sum_{d=0}^{\infty}\binom{5}{d}q^d((1-(1-4q)^{1/2})/2q)^{2d}$$

и результаты перемножить.