משפטי Ramsey

א.1. למסיבה הגיעו שישה אנשים. כל זוג אנשים הם או חברים, או לא חברים. צריך להוכיח שאו שיש שלושה אנשים שכולם חברים זה של זה, או שיש שלושה אנשים שאף אחד לא חבר של אף אחד.

א.2. האם הטענה להעיל תקפה גם לחמישה אנשים?

א.3. מבין 17 אנשים, כל שניים מתכתבים באחת מבין 3 שפות. הוכיחו כי יש שלושה אנשים, שכל שניים מהם מתכתבים באותה שפה.

א.4. הוכח/י את **משפט רמזי**: לכל שני מספרים טבעיים n ו- m, קיים מספר טבעי r, כך שכל גרף בן r קודקודים בהכרח מכיל תת גרף מלא בן n קודקודים, או תת גרף ריק בן m קודקודים. (כלומר קיימים n קודקודים שכולם מחוברים אחד לשני בקשתות, או שקיימים m קודקודים שאף אחד מהם אינו מחובר לאף אחד אחר בקשת).

א.5. הוכח/י כי לכל $n_1,n_2,...,n_k$ מספרים טבעיים, קיים מספר טבעי r, כך שבכל גרף בן r קודקודים שקשתותיו נצבעו ב- k הצבעים 1, 2, ... , k קיים צבע i כך שקיים תת-גרף בן n_i קודקודים שכל קשתותיו בצבע i.

ב.1. בכנס 1978 נציגים מ-6 מדינות, ולכל אחד יש מספר סידורי מ-1 עד 1978. הוכח שעבור אחד הנציגים בכנס מספר סידורי שלו שווה לסכום של מספרים סידוריים של שני נציגים מאותה מדינה, או לפעמיים מספר סידורי של נציג אחר מאות המדינה.

ב.2. על מישור סומנו 70 נקודות, אף 3 לא על ישר אחד. ליאורה וניר משחקים בתורות: ליאורה בתור שלה מעבירה קטע כחול שמחבר שתי נקודות מסומנות, וניר בתורו מעביר קטע אדום (אסור לחבר זוגות נקודות שכבר חוברו). על מנת מנצח, צריך שיהיו 5 נקודות שכל 10 הקטעים שמחברים אותם הם בצבע של השחקן המנצח. האם יש אסטרטגיה מנצחת לאחד השחקנים? אם כן, למי?

ב.3. הכלילו את הסעיף א.3. למצב של N שפות בתנאי שיש מעל $e\cdot N!$ אנשים (כאשר $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...$).

ג.0. גרף הוא זוג של שתי קבוצות - קבוצת קודקודים וקבוצת קשתות החלקית לקבוצת כל הזוגות האפשריים בין שני קודקודים. ניתן להכליל הגדרה זו ל"היפר-גרף" באופן הבא: **היפר-גרף מסדר d** הוא זוג של שתי קבוצות – קבוצת קודקודים, וקבוצת היפר-קשתות מסדר d, החלקית לקבוצת כל ה-d-יות האפשריות בין d קודקודים.

כלומר הכללנו את הקשת, שמסורתית מחברת בין שני קודקודים, להיפר-קשת שמחברת בין d קודקודים.

ג.1. הוכח כי לכל n,m ו- d טבעיים, קיים r טבעי, כך שלכל היפר-גרף מסדר d בן r קודקודים קיים תת היפר-גרף מלא בן n קודקודים או תת היפר-גרף ריק בן m קודקודים.

ד.1. הוכח/י שמכל חמישיית נקודות במישור שאף שלוש מהן אינן נמצאות על ישר אחד, ניתן לבחור ארבע נקודות היוצרות ביניהן מרובע קמור.

ד.2. הוכיחו שאם כל 4 קודקודים של מצולע יוצרים מצולע קמור, אז גם המצולע הוא קמור.

ד.3. הוכח/י את **משפט הסוף הטוב**: לכל n טבעי, קיים r טבעי, כך שמכל r נקודות במישור שאף שלוש מהן אינן נמצאות על ישר אחד (ולהלן: נקודות ב"מצב כללי") קיימות n נקודות היוצרות ביניהן מצולע קמור.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	3	6	9	14	18	23	28	36	40-42
4	1	4	9	18	25	36-41	49-61	58-84	73-115	92-149
5	1	5	14	25	43-49	58-87	80-143	101-216	126-316	169-780
6	1	6	18	36-41	58-87	102-165	113-298	132-495	169-780	179-1171
7	1	7	23	49-61	80-143	113-298	205-540	217-1031	241-1713	289-2826
8	1	8	28	58-84	101-216	132-495	217-1031	282-1870	317-3583	331-6090
9	1	9	36	73-115	126-316	169-780	241-1713	317-3583	565-6588	581-12677
10	1	10	40-42	92-149	144-442	179-1171	289-2826	331-6090	581-12677	798-23556