22/6/2015 **מחנה קיץ** ה' בתמוז תשע"ה

קבוצת ירדן

1. במישור קרטזי מצויר מגן דוד: שני משולשים משוכללים בעלי מרכז משותף C, שסימטריים זה לזה ביחס ל-C. הנקודות $A_1,...,A_6$ הן הקודקודים של המשולשים. הצלעות של המשולשים נחתכות בנקודות $B_1,...,B_6$.
בנוסף, נתון פולינום ממשי בשני משתנים $p(x,y)$, שדרגתו קטנה מ-3. כלומר הפולינום הוא סכום של ביטויים מהצורה $a\cdot x^k\cdot y^m$, כאשר $k+m\le 3$. ניתן לחשב את הערך של p בכל נקודה במישור.
בהנחה ש-$p(C)=0$ ו-$p(B_1)+...+p(B_6)=1$, חשבו את $p(A_1)+...+p(A_6)$.

2. נתונה טבלה מלבנית. בכל משבצת רשום 0, 1, 2 או 3. שתי משבצות נקראות סמוכות אם יש להן צלע משותפת. נתון שבשתי משבצות סמוכות לא יכול להיות רשום 0 ו-2. כמו כן, נתון שבשתי משבצות סמוכות לא יכול להיות רשום 1 ו-3. בכל המשבצות שסמוכות לשפה רשומים אפסים. הוכיחו שכמות הקודקודים שמסביב להם רשומים המספרים 0, 1, 2, ו-3 נגד כיוון השעון שווה לכמות הקודקודים שמסביב להם רשומים אותם המספרים לפי כיוון השעון.

3. מצאו את כל הזוגות של מספרים רציונאליים חיוביים a,b עבורם $a^b=b^a$.

4. שלושה קיפודים נמצאים בקודקודים של משולש משוכלל שאורך הצלע שלו 100 מטרים. ברגע מסוים כל קיפוד הולך בקו ישר: הקיפוד הראשון הולך מטר, השני שני מטרים, והשלישי 3 מטרים.
א. האם יתכן שבסוף הקיפודים נמצאים בקודקודים של משולש משוכלל?
ב. האם יתכן שבסוף הקיפודים נמצאים בקודקודים של משולש משוכלל באותו גודל כמו המשולש המקורי?
ג. שאלה דומה עבור ריבוע: האם יתכן שארבעה קיפודים התחילו בקודקודים של ריבוע עם אורך צלע 100 מטר, עברו מרחקים 1, 2, 3 ו-4 מטרים (לאו דווקא בסדר זה), וסיימו את תנועתם בקודקודים של ריבוע?

בהצלחה!

22/6/2015 **מחנה קיץ** ה' בתמוז תשע"ה

קבוצת רותם

1. מצאו את כל הזוגות של מספרים רציונאליים חיוביים a,b עבורם $a^b = b^a$.

2. שלושה קיפודים נמצאים בקודקודים של משולש משוכלל שאורך הצלע שלו 100 מטרים. ברגע מסוים כל קיפוד הולך בקו ישר: הקיפוד הראשון הולך מטר, השני שני מטרים, והשלישי 3 מטרים.

א. האם יתכן שבסוף הקיפודים נמצאים בקודקודים של משולש משוכלל?

ב. האם יתכן שבסוף הקיפודים נמצאים בקודקודים של משולש משוכלל באותו גודל כמו המשולש המקורי?

ג. שאלה דומה עבור ריבוע: האם יתכן שארבעה קיפודים התחילו בקודקודים של ריבוע עם אורך צלע 100 מטר, עברו מרחקים 1, 2, 3 ו-4 מטרים (לאו דווקא בסדר זה), וסיימו את תנועתם בקודקודים של ריבוע?

3. נגיד שמשבצות בלוח קרובות אם אפשר להגיע מאחת לשנייה תוך לא יותר מאשר 4 מהלכים, כאשר בכל מהלך עוברים למשבצת סמוכה לפי צלע. נתון לוח משבצות מלבני 15×12. האם ניתן להציב על הלוח N כלים, שאף שניים מהם לא נמצאים במשבצות קרובות

א. כאשר $N=15$?

ב. כאשר $N=18$?

בהצלחה!

23/6/2015 **מחנה קיץ** ו' בתמוז תשע"ה

תחרות קבוצתית

אין להשתמש במחשבון

1. על לוח משבצות $n\times n$ נמצאים זבוב ושני עכבישים. בכל מהלך זבוב עובר למשבצת חדשה שיש לה קודקוד משותף עם המשבצת הקודמת (יכול גם להישאר במקום). לאחר מכן כל אחד משני העכבישים עובר למשבצת חדשה סמוכה שיש לה צלע משותפת עם המשבצת הקודמת (יכול גם להישאר במקום). אם עכביש וזבוב מגיעים ברגע מסוים לאותה משבצת, העכבישים מנצחים (אפילו אם העכביש הגיע לאותה המשבצת קודם, לא כמו בשח). האם לעכבישים יש אסטרטגיה מנצחת?

2. נתונה פונקציה $f:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$ המוגדרת על ידי $f(1)=1$ ונוסחת הנסיגה
$$f(n)=f(n-1)+f\left(\lfloor n/2\rfloor\right)$$ לכל $n>1$.

א. עבור אילו ערכי n המספר $f(n)$ זוגי?

ב. עבור אילו ערכי n המספר $f(n)$ מתחלק ב-4?

3. במשולש חד-זווית ABC הזוויות ב-A,C הן α,γ בהתאמה. הזווית γ קטנה יותר מכל זווית אחרת במשולש. במשולש ABC העבירו תיכונים AM_1,BM_2 וגבהים AH_1,BH_2 (H_i,M_i נקודות נמצאות על הצלעות). על המשך הישר M_1H_2 מעבר ל-M_1 נבחרה נקודה K כך ש-$\measuredangle KH_1C=\alpha$. על המשך הישר M_2H_1 מעבר ל-M_2 נבחרה נקודה L כך ש-$\measuredangle KH_2L=\alpha+\gamma$. הוכיחו כי KL מקביל ל-AB.

4. בכל משבצת של לוח משבצות ריבועי כתוב 0 או 1. מותר לשנות את הערכים שכתובים באלכסון הראשי. הוכיחו שאפשר להגיע למצב, בו כל השורות שונות זו מזו וכל העמודות שונות זו מזו.

5. נחלק את כל שאריות מודולו 101, חוץ מ-0, לשני סוגים: חיוביים ושליליים. השאריות 1, 2, 3, ..., 50 נחשבות חיוביות, והשאריות $-1,-2,-3,...,-50$ שליליות. כעת נגדיר "סדר", עבור כל שתי שאריות שונות: a גדול מ-b אם $a-b$ חיובי.
כל 101 השאריות השונות סודרו במעגל בסדר אקראי (המעגל מכוון נגד כיוון השעון). בכל שלב, מוצאים מספר כלשהו במעגל שאחריו יש מספר יותר קטן, ומחליפים בין שני המספרים. האם יתכן שבמשחק זה יהיו אינסוף מהלכים?

6. במשולש ABC הקטע AK הוא חוצה זווית, כאשר נקודה K היא על הצלע BC. נקודה J היא מרכז המעגל החסום מבחוץ למשולש ABC, שמשיק לצלע AB ולהמשכי הצלעות AC, BC. המעגל החוסם של JAB יסומן ω. הישר JK חותך את ω בשתי נקודות: J ו-M. הוכיחו שחוצה זווית של $\measuredangle B$ במשולש ABC והמשיקים ל-ω בנקודות A ו-M נפגשים בנקודה אחת.

7. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$ שמקיימות
$f\left(f\left(x\right)+y\right)=f\left(x+y\right)+x$ לכל $x,y>0$.

8. בלוח משבצות 8×8 נמחקו מספר משבצות. צריח מעופף הוא כלי שח, שהולך במאונך ובמאוזן, ומסוגל לדלג גם על המשבצות החסרות. כמה משבצות צריך למחוק על מנת שלא יהיה מעגל המילטון?

9. עבור a,b,c חיוביים הוכיחו כי
$$\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{a^2-ac+c^2}+\frac{1}{b^2-bc+c^2}\geq\frac{6}{a^2+b^2+c^2}.$$

בהצלחה!

24/6/2015 **מחנה קיץ** ז' בתמוז תשע"ה

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. על הלוח רשומים שלושה מספרים: 3, 5 ו-7. בכל מהלך מיכל בוחרת מספר כלשהו ומגדילה אותו ב-1, ורמי רושם את המכפלה של שני המספרים האחרים במחברת. לאחר 5775 מהלכים, האם סכום המספרים שנרשמו במחברת של רמי יהיה זוגי או אי-זוגי?

2. צירוף xy של שתי ספרות נקרא מגניב אם קיים מספר טבעי a כך ששתי הספרות הימניות ביותר של a^a הן xy. הוכיחו שיש פחות מ-70 צירופים מגניבים.

3. במישור נתונים 3 מעגלים α,β,γ, שאף שניים מהם לא נחתכים ולא מכילים זה את זה. המשיקים המשותפים הפנימיים של β ו-γ נפגשים בנקודה A. המשיקים המשותפים הפנימיים של α ו-γ נפגשים בנקודה B. המשיקים המשותפים הפנימיים של β ו-α נפגשים בנקודה C. מעבירים 6 ישרים נוספים: שני המשיקים מ-A ל-α, שני המשיקים מ-B ל-β, שני המשיקים מ-C ל-γ. הוכיחו כי ששת הישרים האלה משיקים לאותו מעגל ω, ובטאו את הרדיוס של ω באמצעות הרדיוסים של γ,β,α.

4. על הלוח ציירו $n>1$ קטעים אדומים. ברק הצליח לצייר מצולע בעל n^2+1 קודקודים, שכולם נמצאים על הקטעים האדומים. הוכיחו כי מישל יכולה לצייר מצולע בעל n^3+1 קודקודים שכולם נמצאים על הקטעים האדומים.
(נזכיר כי מצולע הוא קו שבור סגור שלא חותך את עצמו, ואף 3 קודקודים רצופים שלו לא נמצאים על ישר אחד.)

בהצלחה!

24/6/2015 **מחנה קיץ** ז' בתמוז תשע"ה

קבוצת רותם

1. עבור מספר טבעי $n \geq 2$ נגדיר את הקבוצה הבאה:

$$A_n = \{2^n - 2^k \mid k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k < n\}$$

מצאו את המספר הטבעי הגדול ביותר שלא ניתן לבטא כסכום של מספר אחד או יותר מתוך איברי A_n (מותר להשתמש באותו מספר כמה פעמים).

2. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ המקיימות:

$$f(f(m) + n) + f(m) = f(n) + f(3m) + 2014$$

לכל שני שלמים n,m.

3. על גבי מפית משורטטים n מעגלים אשר כל שניים מהם נחתכים, ואף שלושה לא נחתכים באותה נקודה. טורבו החילזון זוחל לאורך המעגלים, ומשאיר אחריו שובל של כסף, באופן הבא: הוא מתחיל לנוע לאורך אחד המעגלים, עם כיוון השעון. בכל פעם שהוא מגיע לחיתוך עם מעגל אחר, הוא עובר לנוע לאורך המעגל החדש, והופך את מגמת התנועה שלו - כלומר, אם במעגל הקודם הוא זחל עם כיוון השעון, כעת הוא יזחל נגד כיוון השעון, ולהפך.

הוכיחו שאם בסוף התהליך כל המעגלים מכוסים לחלוטין בכסף, אזי n אי-זוגי.

בהצלחה!