23/2/2015 **מחנה חורף** ד' באדר תשע"ה

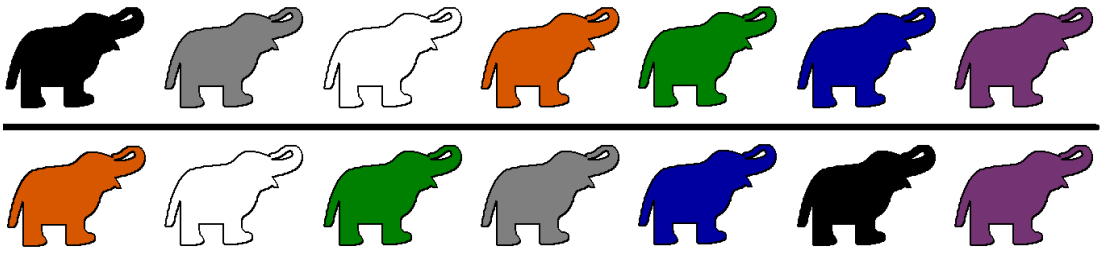
קבוצת ירדן

1. במרובע קמור ABCD, אמצעי הצלעות AB ו-CD הם M ו-N, ו-X זה האמצע של MN. הראו כי $S_{ABX}+S_{CDX}=S_{BCX}+S_{DAX}$.

2. בטבלה $n\times n$ סומנו $2n-k$ משבצות בדיוק, כך שבכל שורה יש משבצת מסומנת, ובכל עמודה יש משבצת מסומנת. הראו כי קיימות k משבצות מסומנות, שכל שתיים מהן נמצאות בשורות שונות ובעמודות שונות.

3. נתונים מספרים ממשיים a,b,c,d שונים בזוגות ושונים מ-0, שמקיימים $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=4$, וגם $ac=bd$. הוכיחו כי $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}\le -12$.

4. אריאל משחק בפילי צעצוע צבעוניים. יש לו n פילים שמסודרים בסדר ספציפי (ראשון, שני, שלישי, . . . , אחרון). כל יום הוא מסדר אותם מחדש לפי העיקרון הבא: קודם הראשון, אחריו אחרון, אחרי זה השני, אחר כך השני מהסוף, אחרי זה השלישי, אחר כך השלישי מהסוף, וכך הלאה. הציור ממחיש את התהליך עבור $n=7$.



הוכיחו שכעבור לא יותר מאשר n מהלכים, הפילים יחזרו לסדר המקורי שלהם.

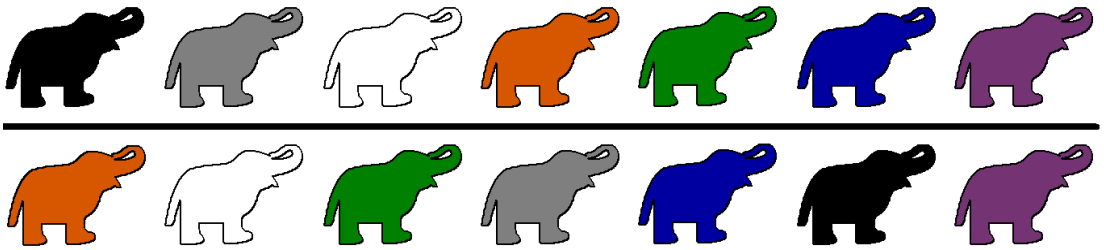
בהצלחה!

23/2/2015 **מחנה חורף** ד' באדר תשע"ה

קבוצת רותם

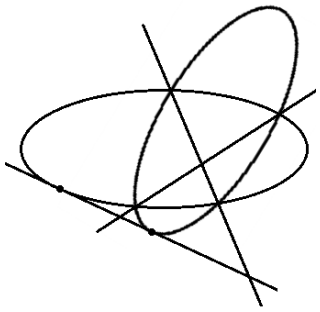
1. מספרים ממשיים a,b,c,d שונים בזוגות ושונים מ-0, שמקיימים $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=4$, וגם $ac=bd$. הוכיחו כי $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}\le -12$.

2. אריאל משחק בפילי צעצוע צבעוניים. יש לו n פילים שמסודרים בסדר ספציפי (ראשון, שני, שלישי, . . . , אחרון). כל יום הוא מסדר אותם מחדש לפי העיקרון הבא: קודם הראשון, אחריו אחרון, אחרי זה השני, אחר כך השני מהסוף, אחרי זה השלישי, אחר כך השלישי מהסוף, וכך הלאה. הציור ממחיש את התהליך עבור $n=7$.



הוכיחו שכעבור לא יותר מאשר n מהלכים, הפילים יחזרו לסדר המקורי שלהם.

3. נתון p ראשוני. כמה פתרונות יש למשוואה $a^2+b^3+c^7\equiv 0 \pmod p$, כאשר $0\le a,b,c<p$?



4. שתי אליפסות נפגשות בקודקודים של מרובע קמור. קו ישר שמשיק לשתי האליפסות בנקודות A ו-B חותך את המשכי האלכסונים של המרובע בנקודות P ו-Q. הוכיחו שהנקודות A, B, P, Q יוצרים רביעייה הרמונית (כלומר יחס כפול שווה ל-1−).

בהצלחה!

24/2/2015 **מחנה חורף** ה' באדר תשע"ה

תחרות קבוצתית

אין להשתמש מחשבון

1. על לוח 7×7 יושבים זבובים (על כל משבצת זבוב אחד). ברגע מסוים מישהו מוחא כף וכל זבוב קופץ למשבצת סמוכה. מה המספר המקסימלי של משבצות שיכולות להישאר פנויות?

2. מרצפים את המישור האינסופי באבני דומינו, כך שלא קיים זוג אבנים המכסה יחדיו ריבוע באורך צלע 2. הוכח שניתן להעביר את הריצוף לעצמו באמצעות הזזה, או שניתן לעשות זאת באמצעות סיבוב בזוית ישרה.

3. יוסי רשם על הלוח לפי הסדר את סכומי הספרות של החזקות של 16, מ-$16^0=1$ עד 16^7, כולל (ברישום עשרוני). הסדרה שנרשמה היא סדרה עולה ממש של מספרים, והמספר האחרון בה הוא 43. הראו כי הסדרה היא סדרה חשבונית.

4. בתוך מעגל שרדיוסו 1 נמצאים מספר מלבנים, כולם בעלי שטח 1, שלא עולים זה על זה. מהי הכמות המרבית האפשרית של מלבנים?

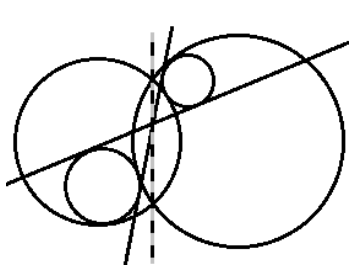
5. נגדיר $Q_k=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{k^2}$.

חשבו את הביטוי $\frac{3Q_1+5Q_2+7Q_3+9Q_4+...+11549Q_{5774}}{5775}-5775\cdot Q_{5775}$.

6. מרדכי והמן משחקים משחק על רשת משולשית. מרדכי צובע בכל תור צלע של משבצת משולשית בכתום, והמן צובע בכל תור צלע של משבצת משולשית בכחול. מרדכי מתחיל.
א. נניח שהמטרה של מרדכי היא שייוצר במהלך המשחק משולש שווה צלעות שכל הצלעות שלו צבועות באותו הצבע, ואורך הצלע שלו גדולה מאורך הצלע של המשבצות. האם יוכל מרדכי להשיג את מטרתו?
ב. נניח שהמטרה של מרדכי היא שבאחת המשבצות כל הצלעות יהיו באותו צבע. האם הוא יוכל להשיג מטרה זו? אם כן, כמה מהלכים ידרשו לשם כך במקרה הגרוע ביותר?

7. מצאו את כל הפתרונות בשלמים למשוואה $a^4-b^3=7$.

8. המעגלים α,β נחתכים. המעגל μ משיק ל-α מבחוץ ול-β מבפנים, ואילו המעגל ν משיק ל-α מבפנים ול-β מבחוץ. הראו שהמשיקים המשותפים הפנימיים של μ ו-ν נפגשים על הישר המחבר את שתי נקודות החיתוך של α ו-β.



המשך בצד השני של הדף

9. נניח כי $a,b,c,d \geq 0$. הוכיחו כי

$$\frac{a}{c}\cdot(a+8b)+\frac{b}{d}\cdot(b+8c)+\frac{c}{a}\cdot(c+8d)+\frac{d}{b}\cdot(d+8a)\geq 9(a+b+c+d).$$

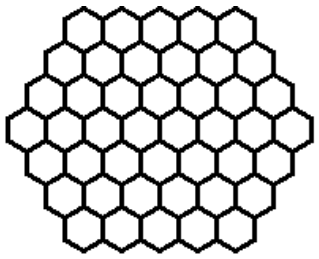
10. נגיד שפרבולה מחבקת מעגל, אם הפרבולה משיקה למעגל בשתי נקודות שונות. במישור צוירו 3 מעגלים שונים, ו-3 פרבולות שונות, כך שכל פרבולה מחבקת שני מעגלים. הוכיחו שקיים משיק משותף לכל שלוש הפרבולות.

11. נתון שריג 4×4 של נקודות במישור, ועליו מציירים קו שבור סגור: בוחרים נקודה, מותחים ממנה קטע לאחרת, ממנה לשלישית, וכן הלאה עד שבסוף חוזרים לנקודה הראשונה. אם דורשים שהקו יעבור בכל נקודה פעם אחת בדיוק, מה האורך המקסימלי שיכול להיות לו?

בהצלחה!

25/2/2015 **מחנה חורף** ו' באדר תשע"ה

קבוצת ירדן



1. לוח המשושים שבציור מרוצף על ידי אבני דומינו: כל אבן דומינו מורכבת משתי משבצות משושות. אבני הדומינו לא עולות אחת על השנייה. כל אבן דומינו מכוונת באחד מבין 3 כיוונים.



הוכיחו שבכל כיוון יש מספר זוגי של אבני דומינו.

2. לכל מספר n שלם חיובי נגדיר את $S(n)$: סכום כל המכפלות $a\cdot b$ כאשר המספרים a,b שלמים, ומקיימים $0<a<b<n$. תארו את כל המספרים n, כך ש-$S(n)$ מתחלק ב-n.

3. נתון משושה קמור ABCDEF. בתוך המשושה נמצאות נקודה K כך שהמשולשים KAB, KDE משוכללים, ונקודה M כך שהמשולשים MBC, MEF משוכללים.
הראו שקיימת במישור גם נקודה N, עבורה המשולשים NFA, NCD משוכללים.

4. במישור מצויר משולש, ובקודקודיו רשומים המספרים a,b,c. במהלך הראשון בוחרים נקודה בתוך המשולש, רושמים בה את המספר $a+b+c$, ומחברים אותה לקודקודי המשולש בקטעים ישרים. מתקבל משולש שמחולק למשולשים, כאשר בכל קודקוד רשום מספר. במהלך הבא, בוחרים נקודה בתוך כל אחד מהמשולשים שנוצרו, מחברים אותה באמצעות קטעים ישרים לקודקודי המשולש בו היא נמצאת, ורושמים בה את סכום המספרים בקודקודים אלה. כך ממשיכים לחלק את המשולש – בכל מהלך מחלקים בו זמנית את כל המשולשים שיצרנו עד כה (שעדיין לא חולקו). מה יהיה סכום המספרים בכל הנקודות יחדיו לאחר עשרה מהלכים?

בהצלחה!

25/2/2015 **מחנה חורף** ו' באדר תשע"ה

קבוצת רותם

1. נגדיר פונקציה $f:(0,1)\to(0,1)$ בצורה הבאה:

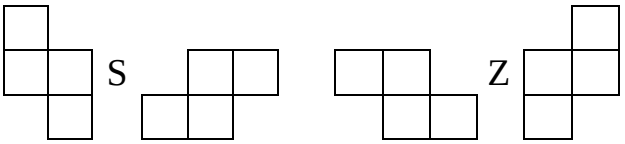
$$f(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{2} & x<\frac{1}{2}\\ x^2 & x\geq\frac{1}{2}\end{cases}.$$

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$, כך ש-$0<a<b<1$. נגדיר סדרות a_n,b_n לפי $a_0=a$, $b_0=b$, ונוסחת נסיגה $a_n=f(a_{n-1})$, $b_n=f(b_{n-1})$ לכל $n>0$. הראה שיש מספר שלם חיובי n עבורו $(a_n-a_{n-1})(b_n-b_{n-1})<0$.

2. מצאו את כל הזוגות (x,y) של שלמים חיוביים, המקיימים

$$\sqrt[3]{7x^2-13xy+7y^2}=|x-y|+1.$$

3. טטרומינו היא צורה שמורכבת מ-4 משבצות, על ידי הדבקה של שתי אבני דומינו. ניתן להגדיר כמה סוגים של טטרומינו; הסוגים החשובים לנו הם S ו-Z והם מוגדרים בהתאם לציור.



צורה מסוימת מצויר על דף משבצות לפי קווי רשת. נניח כי ניתן לרצף את הצורה באמצעות טטרומינו מסוג S בלבד. הוכיחו כי בכל ריצוף של הצורה על ידי טטרומינו מהסוגים S ו-Z, הסוג Z יופיע מספר זוגי של פעמים.

4. על מעגל קבוע Γ נקבעו שלוש נקודות A, B, C. בנוסף, נקבע המספר $\lambda\in(0,1)$. עבור נקודה משתנה P על Γ השונה מ-A, B ו-C, תהי M הנקודה על קטע CP כך ש-$CM=\lambda\cdot CP$. תהיה Q נקודת החיתוך השנייה של המעגלים החוסמים של משולשים AMP ו-BMC. הוכיחו כי כאשר P נעה על המעגל Γ, המקום הגיאומטרי של Q הוא מעגל.

בהצלחה!

26/2/2015 **מחנה חורף** ז' באדר תשע"ה

קבוצת ירדן

1. שני שחקנים כותבים על הלוח בתורות מספרים שלמים בין 2 ל-100, כולל. בתור הראשון מותר לשחקן הראשון לכתוב מספר כלשהו, ובכל התורות האחרים מותר לשחקן שתורו לכתוב רק מספר זר למספר האחרון שנכתב. אסור לחזור על מספר שכבר כתוב על הלוח. מפסיד מי שלא יכול לעשות מהלך.
מצאו את כל מהלכי הפתיחה האפשריים, שאחריהם השחקן הראשון יכול להבטיח ניצחון.

2. יהיו $n,m>1$ שלמים. הוכיחו כי $\varphi\left(n^m-1\right)$ מתחלק ב-m.

3. נתונים מספרים $a_1,a_2,a_3,...,a_n,b_1,b_2,b_3,...,b_n$ ממשיים המקיימים את האי-שוויונים הבאים:

$$a_1<a_2<...<a_n$$
$$b_1>b_2>...>b_n$$
$$a_1<b_1$$
$$a_n>b_n$$

הוכיחו כי: $\max_{\ell}\left(\min\left(a_\ell,b_{\ell-1}\right)\right)=\min_{\ell}\left(\max\left(a_\ell,b_\ell\right)\right)$.

4. נתונים מעגלים α,β,γ שמרכזיהם A,B,C בהתאמה. המרכז הרדיקלי של המעגלים יסומן ב-P. מ-P מעבירים זוג ישרים שמשיקים ל-α בנקודות A_1,A_2, ונקודת האמצע של A_1A_2 תסומן A'. באופן דומה מגדירים B', C'. נניח כי הנקודות A',B',C' נמצאות על ישר אחד. הוכיחו כי האנכים דרך A,B,C לישרים PA,PB,PC בהתאמה נפגשים בנקודה אחת.

בהצלחה!

26/2/2015 **מחנה חורף** ז' באדר תשע"ה

קבוצת רותם

1. נתונים מספרים $a_1,a_2,a_3,...,a_n,b_1,b_2,b_3,...,b_n$ ממשיים המקיימים את האי-שוויונים הבאים:

$$a_1 < a_2 < ... < a_n$$
$$b_1 > b_2 > ... > b_n$$
$$a_1 < b_1$$
$$a_n > b_n$$

הוכיחו כי: $\max_{\ell}\left(\min\left(a_\ell,b_{\ell-1}\right)\right)=\min_{\ell}\left(\max\left(a_\ell,b_\ell\right)\right)$.

2. נתונים מעגלים α,β,γ שמרכזיהם A,B,C בהתאמה. המרכז הרדיקלי של המעגלים יסומן ב-P. מ-P מעבירים זוג ישרים שמשיקים ל-α בנקודות A_1,A_2, ונקודת האמצע של A_1A_2 תסומן A'. באופן דומה מגדירים B', C'. נניח כי הנקודות A',B',C' נמצאות על ישר אחד. הוכיחו כי האנכים דרך A,B,C לישרים PA,PB,PC בהתאמה נפגשים בנקודה אחת.

3. יהיו n,m שלמים חיוביים עם $n>1$, ויהי k שלם אי-שלילי. הוכיחו כי $\varphi\left(n^{2^k m}-1\right)$ מתחלק ב-$m^{k+1}\cdot 2^{\binom{k+1}{2}}$.

4. הראו כי לכל n טבעי מתקיים $\sum_{k=1}^{2n}\frac{k!}{n^{k+1}}\sum_{2r+\ell=k}\binom{n}{r,\ell,n-r-\ell}\frac{r}{2^r}=1$.

בהצלחה!