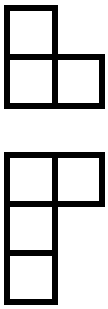
19/11/2014 **מחנה סתיו** כ"ז בחשון תשע"ה

קבוצת ירדן



1. בציור שני סוגי מרצפות: פינה של 3 משבצות ופינה של 4 משבצות. מרצפים חדר בגודל 5×8 (מותר לסובב ולשקף את הצורות). כמה מרצפות של 3 משבצות יכולות להיות בריצוף? מצאו את כל התשובות האפשריות.

2. כמה פתרונות במספרים שלמים יש למשוואה $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{5} \right\rfloor = N$?

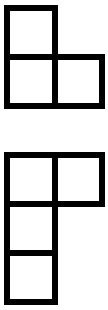
3. במשולש ABC הזווית C ישרה. נקודה M היא אמצע AB, ונקודה T היא עקב הגובה מ-C. הישר שמקביל ל-CM ועובר דרך T פוגש את הישר BC בנקודה Q ואת הישר AC בנקודה P. הראו כי המעגל החוסם של משולש CPQ משיק לישר CT.

4. מצאו x ממשי, עבורו $\frac{x^5}{5} + \left(x^2+x\right)\left(x^2+x+1\right) = 1$.

בהצלחה!

כ"ז בחשוון תשע"ה **מחנה סתיו** 19/11/2014

קבוצת רותם



1. בציור שני סוגי מרצפות: פינה של 3 משבצות ופינה של 4 משבצות. מרצפים חדר בגודל 8×5 (מותר לסובב ולשקף את הצורות). כמה מרצפות של 3 משבצות יכולות להיות בריצוף? מצאו את כל התשובות האפשריות.

2. כמה פתרונות במספרים שלמים יש למשוואה $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{5} \right\rfloor = N$?

3. נתון מחומש קמור ABCDE ונקודה P בתוכו. המעגל α עובר דרך שלושת עקבי האנכים מ-P לצלעות המשולש EAB. המעגלים $\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ מוגדרים באופן דומה באמצעות הנקודה P והמשולשים ABC, BCD, CDE, DEA בהתאמה.
המעגלים α ו-β נפגשים בשתי נקודות, אחת מהן על הצלע AB והשנייה תסומן ב-S. באופן דומה נסמן ב-T, U, V, W את נקודות המפגש של זוגות המעגלים β ו-γ, γ ו-δ, δ ו-ε, ε ו-α בהתאמה שלא נמצאות על צלעות המחומש ABCDE. הראו שהנקודות S, T, U, V, W נמצאות על מעגל אחד.

4. שורשי המשוואה $x^3-16x^2-57x+1=0$ הם a,b,c.

א. הוכיחו כי $a,b,c\in\mathbb{R}$.

ב. הוכיחו כי $\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}+\sqrt[5]{c}=1$.

בהצלחה!

20/11/2014 **מחנה סתיו** כ"ח בחשוון תשע"ה

תחרות קבוצתית

1. בחדר בצורת משושה משוכלל שכל הקירות שלו מראות עומד איש עם אקדח לייזר. הוא יורה במקביל לאחד הקירות. מה המרחק המרבי שקרן הלייזר עשויה לעבור, עד שהיא תפגע לו בגב?

2. נסמן ב-a_n מספר שרשום בבסיס n (למשל $(101_2 = 5_{10})$.
א. נתבונן במספר $a = 5775_{12} \cdot 5775_{22} \cdot 5775_{32} \cdot ... \cdot 5775_{1002}$.
מהי ספרת האחדות של a בבסיס 10?
ב. אותה שאלה עבור $b = 5775_8 \cdot 5775_{16} \cdot 5775_{32} \cdot 5775_{64} \cdot ... \cdot 5775_{2^{102}}$.

3. מעגל שמרכזו I חסום במרובע ABCD. צלעות המרובע AB, BC, CD, DA משיקות למעגל בנקודות P, Q, R, S בהתאמה. הישרים PQ ו-RS נפגשים בנקודה Y. הראו כי הישר YI מאונך לאלכסון BD.

4. משחקים משחק: על הלוח כתוב מספר טבעי x. בכל שלב, בהנחה ש-k הוא מספר טבעי עבורו $\frac{(k-1)(k-2)}{2} < x \le \frac{k(k-1)}{2}$, מותר לבצע אחד מבין שלושה מהלכים:
או להחסיר $k-1$, או להוסיף $k-1$, או להוסיף k, בתנאי שהמספר יישאר טבעי.
המשחק מתחיל כאשר על הלוח כתוב 5777 והמטרה היא להגיע ל-5778. בכל פעם שמחליפים את הזוגיות של המספר משלמים שקל למס ערך מוסף. מהי הכמות המינימלית של שקלים שנחוצה על מנת להשיג את המטרה?

5. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ המקיימות
$f(x+y) = f(x-1)f(y) + f(y-1)f(x)$ לכל $x,y \in \mathbb{Z}$.

6. נתונים 4 מספרים שלמים חיוביים k,ℓ,m,n כך ש-n זר ל-ℓ, ובנוסף $k^n - 1$ מתחלק ב-m. הוכיחו כי $(k-1,m) = (k^\ell - 1, m)$.

7. נתון ארבעון ABCD, שמרכז הכדור החסום בו הוא I. הוכיחו כי I הוא אמצע של קטע, שהקצה אחד שלו על המקצוע AB והקצה שני שלו על המקצוע CD, אם ורק אם $S_{ABC} + S_{ABD} = S_{ACD} + S_{BCD}$.

8. מערך ריבועי של נורות בגודל 5 על 5 עובד כך שלחיצה על מתג של נורה גורמת לה ולכל הנורות השכנות לפי צלע להפוך את מצבן. בהתחלה כל הנורות כבויות. לאחר מספר לחיצות על מתגים, בדיוק נורה אחת דולקת. כמה אפשרויות יש למיקום נורה זו?

המשך מעבר לדף

9. אם $\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{b}},\frac{1}{\sqrt{c}}$ צלעות משולש, אז $\sum_{cyc} a^3b \geq \sum_{cyc} a^2b^2$.

10. משחק מתבצע על מלבן שהצלעות הארוכות שלו מכוונות ממזרח למערב והן באורך 100 ק"מ והצלעות הקצרות באורך 1 ק"מ (כדה"א שטוח). הצד הדרומי של המלבן הוא כביש; על הכביש ניתן לרוץ במהירות של 10 קמ"ש; יתר המלבן הוא שטח שבו אפשר להתקדם רק במהירות 2 קמ"ש. בפינה הצפון-מזרחית נמצאים פושעים (נקודתיים), ובפינה הדרום מזרחית (כלומר על הכביש) נמצא שוטר עם אקדח, שבאמצעותו הוא יכול לחסל פושע הנמצא במרחק R. כולם רואים את כולם ויודעים את כל כללי המשחק.
מטרת הפושעים היא שלפחות אחד מהם יגיע ללא פגע לצד המערבי של המלבן.
א. נניח שיש פושע אחד, $R = 50$ מטרים. האם השוטר יוכל לחסל אותו?
ב. נניח שיש שני פושעים, $R = 400$ מטרים. האם השוטר יוכל לחסל את שניהם?
ג. נניח שיש שני פושעים, $R = 100$ מטרים. האם השוטר יוכל לחסל את שניהם?

בהצלחה!