תרגיל קרמטה

0. (אי-שוויון פוקס) לכל $p_1, p_2, ..., p_n > 0$, $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_n$, המקיימים $\sum_{i=1}^{k} p_i x_i \geq \sum_{i=1}^{k} p_i y_i$ לכל $1 \leq k \leq n$, ו- $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i$ ולכל פונקציה קמורה f , מתקיים $\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot f(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot f(y_i)$.

1. עבור $x \geq 2$, הוכיחו כי $\sqrt[4]{x+4} + \sqrt[4]{2x} \geq \sqrt[4]{2x+2} + \sqrt[4]{x+2}$.

2. עבור $a,b,c,d \geq 0$ המקיימים $a+b+c+d=4$, הוכיחו כי $\sum_{cyc} \frac{1}{3a^2+4} \geq \frac{4}{7}$.

3. עבור $a,b,c \geq 0$ המקיימים $a+b+c=2$, הוכיחו כי $\sum_{cyc} \frac{4a+3}{2a^2+1} \leq 9$.

4. עבור $a,b,c \geq 0$, הוכיחו כי $\sum_{cyc} \sqrt{a^2+bc} \leq \sum_{cyc} \sqrt{a^2+ab}$.

5. עבור $a,b,c \geq 0$, הוכיחו כי $\sum_{cyc} \sqrt{a^2+b} \leq \sum_{cyc} \sqrt{a^2+a}$.

6. עבור $1 \geq a,b,c \geq 0$, הוכיחו כי $\prod_{cyc} (1-a^2b) \geq \prod_{cyc} (1-a^3)$.

7. עבור $a,b,c \geq 0$, הוכיחו כי $\sum_{cyc} \sqrt{a^2+2bc} \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2} + 2\sqrt{ab+ac+bc}$

8. (Szegő) לכל פונקציה קמורה f , $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{2n+1}$, מתקיים אי-שוויון
$f(a_1) - f(a_2) + f(a_3) - ... + f(a_{2n+1}) \geq f(a_1 - a_2 + a_3 - ... + a_{2n+1})$.

9. (1999 IMO) מצאו קבוע מינימלי C, עבורו לכל $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$ מתקיים
$$\sum_{i \neq j} x_i^3 x_j \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^4.$$

10. (1999 IMO) עבור $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n > 0$ אז
$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{x_i + x_{i+1}}{2}} \leq \sum_{cyc} \sqrt{\frac{x_i + x_{i+1} + x_{i+2}}{3}}.$$

בתאבון!