אי-שוויונים, מחנה חורף, תשע"ה

1. מספרים חיוביים a,b,c מקיימים $a+b+c=3$. הוכיחו כי

$$\frac{a^2b}{2a+b}+\frac{b^2c}{2b+c}+\frac{c^2a}{2c+a}\le 1.$$

2. a,b,c מספרים חיוביים. הוכיחו כי $\sqrt{\frac{a+2b}{a+2c}}+\sqrt{\frac{b+2c}{b+2a}}+\sqrt{\frac{c+2a}{c+2b}}\ge 3$.

3. מספרים אי-שליליים a,b,c מקיימים $ab+ac+bc\ne 0$. הוכיחו כי

$$\frac{ab+ac-bc}{b^2+c^2}+\frac{ab-ac+bc}{a^2+c^2}+\frac{-ab+ac+bc}{a^2+b^2}\ge\frac{3}{2}.$$

4. a,b,c מספרים אי-שליליים. הוכיחו כי

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+ac\sqrt{2\left(a^2+c^2\right)}+bc\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}.$$

5. לכל a,b,c ממשיים, הוכיחו כי

$$27\left(a+b\right)^2\left(a+c\right)^2\left(b+c\right)^2\ge 64abc\left(a+b+c\right)^3.$$

6. מספרים אי-שליליים a,b,c מקיימים $a+b+c=3$. הוכיחו כי

$$\sqrt{2a^3+abc}+\sqrt{2b^3+abc}+\sqrt{2c^3+abc}\ge 3\sqrt{3}.$$

7. a,b,c מספרים חיוביים. הוכיחו כי

$$\frac{1}{ab\left(a+1\right)}+\frac{1}{bc\left(b+1\right)}+\frac{1}{ca\left(c+1\right)}\ge\frac{3}{abc\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}.$$

8. במשולש m_c,m_b,m_a תיכונים, ℓ_c,ℓ_b,ℓ_a חוצי זוויות, r_c,r_b,r_a רדיוסים של המעגלים החסומים מבחוץ. הוכיחו כי $m_am_bm_c\cdot\ell_a\ell_b\ell_c\ge r_a^2r_b^2r_c^2$.

9. עבור מספרים אי-שליליים a,b,c המקיימים $a^4+b^4+c^4=3$.
הוכיחו כי $a^7+b^7+c^7+abc\ge 4$.