פולינומים – תרגיל לירדן

1. יהיה $P(x)$ פולינום. האם יתכן שמקדמי הפולינום $Q(x)=P(x)\cdot(x-1)$ כולם חיוביים?

2. פולינום יקרא ***נחמד*** אם סכום המקדמים האי-זוגיים שלו שווה לסכום המקדמים הזוגיים. במילים אחרות $P(x)=a_nx^n+...+a_2x^2+a_1x+a_0$ נחמד אם $a_0+a_2+a_4+...=a_1+a_3+a_5+...$.
נניח כי הפולינומים $P(x),Q(x)$ נחמדים. האם אפשר להוכיח שפולינום $P(x)+Q(x)$ נחמד?
האם אפשר להוכיח שפולינום $P(x)Q(x)$ נחמד?
אותן שאלות כאשר $P(x)$ נחמד אבל $Q(x)$ לאו דווקא נחמד.
(אם אתם טוענים שפולינום בהכרח נחמד, צריך להוכיח את זה, ואם לא – להראות דוגמה נגדית.)

3. נתון כי 5 הוא שורש של פולינום $P(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+1$. הבא\י שורש אחד של פולינום $Q(x)=x^5+dx^4+cx^3+bx^2+ax+1$ (באמצעות a,b,c,d ומספרים ממשיים).

4. נתבונן בפולינום $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ ששורשיו $x_1,x_2,...,x_n$ וגם מקדמיו הם מספרים מרוכבים. נתבונן גם בפולינום $Q(x)=x^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0$ ששורשיו הם $x_1^2,x_2^2,...,x_n^2$.
נניח כי $a_0+a_2+a_4+...$ וגם $a_1+a_3+a_5+...$ ממשיים. הוכיחו כי $b_0+b_1+b_2+...+b_{n-1}$ ממשי.

5. האם הפולינום $x^{2011}+x^{200}+2x^{72}-5$ מתחלק בפולינום x^7+x^3-2 ?

6. האם קיים פולינום עם מקדמים שלמים עבורו $p(7) = 5$, $p(11) = 7$?

7. האם פולינום ריבועי מהצורה $ax^2 + bx + c$, שמקבל ערכים שלמים לכל x שלם, הוא בהכרח בעל מקדמים שלמים? אם כן, הוכח\י. אם לא, הבא\י דוגמא נגדית, ומצא\י תנאי הכרחי ומספיק על a, b, c כדי שלכל x שלם גם
$ax^2 + bx + c$ יהיה שלם.

8. יהיה $p(x)$ פולינום. נתבונן בסדרות הבאות:
סדרה ראשונה: $p(0), p(1), p(2), p(3),...$ (ערכי p בנקודות שלמות אי-שליליות).
סדרה שנייה: $p(1)-p(0), p(2)-p(1), p(3)-p(2),...$
סדרה שלישית: $p(2)-p(1)-\big(p(1)-p(0)\big), p(3)-p(2)-\big(p(2)-p(1)\big),...$
וכו' - כל סדרה מתקבלת מהסדרה הקודמת על ידי לקיחת הפרשים של מספרים עוקבים.
הוכח\י, שבשלב מסוים תתקבל סדרה שמורכב אך ורק מאפסים.

9. מצא\י פולינום $P(x)$ בעל מקדמים שלמים ודרגה מינימלית (חיובית), כך ש-$P\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=0$ עבור מספרים שלמים נתונים a, b (לבטא את מקדמי הפולינום דרך a, b).
להסיק מכאן, מתי $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ רציונלי (זה תלוי ב-a, b כמובן).

פולינומים – תרגיל סופ"ש

1. א. מהי השארית שמתקבלת מחלוקה של פולינום $\left(x^{2011}-1\right)$ ב-$\left(x^{41}-1\right)$?

ב. מצא את המחלק המשותף המקסימלי של $10^{5771}-1$ ושל $10^{1990}-1$.

2. מצא פולינום $P(x)$ שמקיים $P(x+1)-P(x)=x^2$ לכל x.

חשב את הסכום $1^2+2^2+3^2+...+n^2$ לכל n.

3. חשב\י את המקדמים של x^2, של x ושל 1 של הפולינום

$$P_n(x)=\underbrace{\left(...\left(\left((x-2)^2-2\right)^2-2\right)^2-...-2\right)^2}_{\text{פעמים } n}.$$

4. יהי $k>0$ מספר חיובי שלם.

(א) מצא\י פולינום $P_k(x)$ ממעלה מינימלית, עבורו

$$\begin{cases} P_k(0)=P_k(1)=P_k(2)=...=P_k(k-1)=1 \\ P_k(k)=0 \end{cases}$$

שימו לב: לא דורשים שמקדמים יהיו שלמים עבור $k=0$ התנאי הראשון הוא ריק

(ב) כיצד $P_k(x)$ קשור למקדמים בינומיאליים?

(ג) להוכיח כי $P_k(x)$ הוא בעל ערכים שלמים בנקודות שלמות.

(ד) להוכיח כי פולינום $Q(x)$ הוא בעל ערכים שלמים לכל x שלם אם ורק אם קיימים $c_0,c_1,...,c_k$ שלמים (עבור k מסוים) כך ש-$Q(x)=c_0P_0(x)+c_1P_1(x)+...+c_kP_k(x)$.

5. $p(x)$ הוא פולינום עם מקדמים שלמים. נתון כי קיימים 3 מספרים שלמים **שונים** a,b,c כאלה ש-$p(a)=p(b)=p(c)=1$. הוכח כי ל-p אין שורשים שלמים.