מקדמים בינומיים

1. הוכיחו $\sum_{j=0}^{c}(-1)^j\binom{d}{d-c+j}\binom{d-c+j-1}{j}=1$ לכל $d\geq c\geq 1$ שלמים.

2. הוכח כי לכל $\ell>n>1$ מתקיימת הזהות $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{\ell+j}{n}\binom{n+1}{n-j}=\binom{\ell-1}{n}$.

3. הוכיחו כי $\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\cdot\binom{2n-2k}{n-k}=4^n$.

4. לכל n טבעי חשבו את $\sum_{r=0}^{n}2^{r-2n}\binom{2n-r}{n}$.

5. לכל מספר טבעי n הראו כי המספרים $\binom{2^n-1}{0},\binom{2^n-1}{1},\binom{2^n-1}{2},...,\binom{2^n-1}{2^{n-1}-1}$ שקולים (בסדר אחר אולי) למספרים $1,3,5,...,2^n-1$ מודולו 2^k.

6. מצאו את כל המספרים השלמים $m\geq 2$ עבורם כל n שלם בתחום $\frac{m}{3}\leq n\leq\frac{m}{2}$ מחלק את המקדם הבינומי $\binom{n}{m-2n}$.

7. לכל $k\geq 2$, הוכיחו כי $\binom{2^{k+1}}{2^k}-\binom{2^k}{2^{k-1}}$ מתחלק ב-2^{3k} אך לא ב-2^{3k+1}.

8. $\alpha\beta\sum_{\substack{a+b=s\\a,b\in\mathbb{Z}}}\binom{s}{a}(ka+\alpha)^{a-1}(kb+\beta)^{b-1}=\sigma(ks+\sigma)^{s-1}$ כאשר $\sigma=\alpha+\beta$.

9*. הוכיחו את הזהות $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^3=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\cdot\binom{2k}{n}$.

10*.** הוכח כי לכל $s>0$ שלם מתקיימת הזהות:

$$4^s\cdot\binom{s+2}{2}=\sum_{\substack{a+b+c+d=s\\a,b,c,d\geq 0}}2^a\binom{b+3}{3}\cdot\binom{2s-1-a}{c}\cdot\binom{5}{d}.$$