תרגיל באלגברה וטריגונומטריה

חלק א'

1. א. נתון כי $a^2+x^2=b^2+y^2=1$. הוכח כי $xy+ab\le 1$.

ב. נתון בנוסף גם כי $c^2+z^2=1$. הוכח כי $abz+ayc+xbc\le 1+xyz$.

2. עבור זוויות של משולש הוכח כי $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$.

3. מצא את הערך המקסימלי של הביטוי $5\cos x+12\sin x$.

4. חשב ללא מחשבון את $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$.

5. חשב ללא מחשבון את הביטוים:

א. $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}$

ב. $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$

6. מצא נוסחא קצרה עבור $\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\cos 3^\circ+\ldots+\cos 89^\circ$.

7. נסמן $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}$ כאשר 2 מופיע n פעמים.

א. הוכח כי עבור n גדול $a_n\approx 2$.

ב.* הוכח כי $2-a_n$ דואך אקספוננציאלית (כל פעם בערך פי 4).

ג.* חשב את הגבול של $\left(2-a_n\right)\cdot 4^n$ כאשר $n\to\infty$.