תרגיל: העתקות גיאומטריות

1. נתון קו סגור רציף שלא חותך את עצמו, העובר מסביב לנקודה P. הוכיחו כי קיים מיתר AB של הקו, ש-P חוצה אותו.

2. נתון משולש משוכלל ABC. יש לבנות נקודה X בתוכו, כזאת שיחס המרחקים AX:BX:CX הוא 4:5:6.

3. על הצלעות של משולש חד-זוויות ABC נבנו קלפי חוץ משולשים משוכללים ABZ, BCX, ACY.
א. הוכח כי AX = BY = CZ.
ב. הוכח כי AX , BY , CZ נחתכים בזוויות של 60 מעלות.
ג. הוכח כי לכל נקודה P במישור $PA + PB + PC \geq AX$.
ד. יהיה D מרכז המשולש BCX, E מרכז של המשולש ACY. מהי הזווית בין הישר DE לישר AX?
ה. מהו היחס בין אורכי הקטעים AX ו-DE מהסעיף הקודם?

4. במישור חסר צבעים נצבעו 3 נקודות: אחת באדום, השנייה בכחול והשלישית בצהוב. בכל מהלך, בוחרים שתי נקודות צבועות מהמישור שכבר נצבעו בשניים מבין שלושת הצבעים; ואז צובעים נקודה נוספת בצבע השלישי כך שהיא תיצור עם שתי הנקודות משולש שווה צלעות, שצבעי הקודקודים שלו הם אדום, כחול וצהוב עם כיוון השעון בסדר זה. מותר לצבוע נקודה שנצבעה כבר, ומותר שלנקודה יהיו מספר צבעים. הוכח\י כי בכל שלב של המשחק, כל הנקודות הכחולות יהיו על ישר אחד.

5. על צלעותיו של המשולש ABC בונים שלושה משולשים דומים: YBA ו-ZAC כלפי חוץ, ו-XBC כלפי פנים (הקודקודים המתאימים כתובים בסדר זהה). הוכח כי AYXZ מקבילית.

6. משולש ABC שווה שוקיים, AC = AB. נקודה M היא אמצע BC, , נקודה D היא עקב האנך מ-M ל-AC, ונקודה K היא אמצע DM. הוכיחו כי BD מאונך ל-AK.

7. א. לצלעותיו של משולש ABC הצמידו מבחוץ ריבועים. מרכזי הריבועים מסומנים X, Y, Z (הריבוע של Z הוצמד לצלע AB). הוכח כי הקטעים CZ, XY שווים באורכם ומאונכים.
ב. לצלעות של מרובע הצמידו מבחוץ ריבועים, שמרכזיהם (כאשר הולכים נגד כיוון השעון) הם X, Y, Z, T. הוכיחו כי XZ שווה ומאונך ל-YT.

8. על שתי צלעות של משולש ABC נבנו כלפי חוץ מלבנים ABPQ, ACKL, כך שמתקיים $\frac{AB}{BP} = \frac{KC}{CA}$. הוכח כי הישרים BL, CQ, PK נפגשים בנקודה אחת.

9. בריבוע נתון חסומים 1993 משולשים משוכללים נתונים (כל הקודקודים של כל המשולשים נמצאים על ההיקף של הריבוע). הוכיחו, שקיימת נקודה שנמצאת על היקף של 499 משולשים.

10. מצולעים $P_1P_2...P_n$, $Q_1Q_2...Q_n$ חופפים. מצולע $P_1P_2...P_n$ חסום במעגל. M_i זה אמצע הקטע P_iQ_i. הוכח כי הנקודות $M_1,M_2,...,M_n$ נמצאות על ישר אחד או על מעגל אחד.

11. בתוך מרובע ABCD נמצאת נקודה P כך שהמשולשים PAB, PCD משוכללים. הוכיחו כי קיימת במישור גם נקודה Q, כך שהמשולשים QBC, QAD הם שווי-שוקיים, ולשניהם הזווית Q היא 120°.

12. הריבועים ABCD, KLMN מכוונים שניהם נגד כיוון השעון (לאו דווקא מקבילים). הישרים AK ו-BL נפגשים בנקודה P, הישרים BL ו-CM בנקודה Q, הישרים CM ו-DN בנקודה R, והישרים DN ו-KA בנקודה T. הוכיחו ש-8 המעגלים PAB, PKL, QBC, QLM, RCD, RMN, TDA, TNK נפגשים בנקודה אחת.

13*. ריבוע חולק לשתי צורות חופפות על ידי קו עקום. הוכח כי הקו עובר דרך מרכז הריבוע.

14. נתונים שני מעגלים a,b. סדרה אינסופית של מעגלים $\{c_n\}$ נבנתה כך, ש-c_n משיק ל-a,b וגם ל-c_{n-1}.

א. האם אפשר לטעון שמרכזי המעגלים c_n נמצאים על מעגל מוכלל (ז. א. מעגל או ישר)?

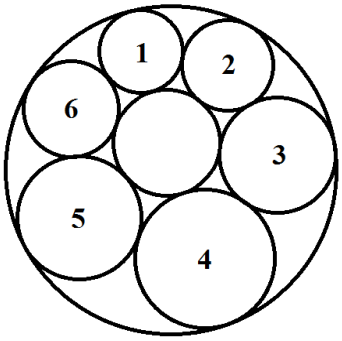
ב. האם אפשר לטעון שנקודות ההשקה של c_n,c_{n-1} נמצאים על מעגל מוכלל?

ג. האם אפשר לטעון שהמשיקים המשותפים של c_n,c_{n-1} בנקודות ההשקה נפגשים בנקודה אחת? אם כן, איפה נמצאת הנקודה הזאת?

15. השוקיים AB ו-CD של טרפז ABCD הן מיתרים של המעגלים w_1 ו-w_2 בהתאמה, שמשיקים זה לזה מבחוץ. הזוויות של הקשתות (המשיקות) AB ו-CD שוות בהתאמה ל-α ו-β. כמו כן AB ו-CD הן מיתרים של המעגלים w_3 ו-w_4 בהתאמה. הזוויות של הקשתות AB ו-CD של המעגלים החדשים (שנמצאים באותו צד של AB ו-CD כמו הקשתות המתאימות של שני המעגלים הראשונים) שוות בהתאמה ל-β ו-α. הוכח כי w_3 ו-w_4 משיקים.

16. ABCD מרובע שאלכסוניו מאונכים. השיקופים של מפגש האלכסונים ביחס לארבע הצלעות הם P,Q,R,S. הוכיחו כי P,Q,R,S על מעגל אחד.

17.** ABC משולש שחסום במעגל Γ. מעגל ω משיק ל-Γ מבפנים בקשת BC ומשיק לצלעות AC, BC בנקודות P, Q. הוכיחו כי אמצע PQ הוא מרכז המעגל החסום ב-ABC.



18*. נתונים שישה מעגלים שונים שיוצרים מחרוזת (כמו בציור): כולם משיקים לשני מעגלים נתונים נוספים, וגם כל שני מעגלים סמוכים במחרוזת משיקים (ראשון לשני, שני לשלישי, ... , שישי לראשון). רדיוסיהם של מעגלי המחרוזת הם $R_1,R_2,...,R_6$.

הוכיחו כי $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6}$.