תרגיל 4

1. במלבן ששטחו 1 נמצאים 5 צורות, ששטח של כל אחת מהן $\frac{1}{2}$. הוכיחו כי קיימות
א. שתי צורות ששטח החיתוך שלהן לפחות $\frac{3}{20}$.
ב. שתי צורות ששטח החיתוך שלהן לפחות $\frac{1}{5}$.
ג. שלוש צורות ששטח החיתוך המשותף שלהם לפחות $\frac{1}{20}$.

פתרון. א. כל צורה מכסה 50% מהשטח, ונניח שחיתוך של כל שתי צורות הוא רק 15%. לכן צורה B מכסה מעל 35% מהשטח בנוסף למה שהצורה A מכסה, וביחד שתי הצורות מכסות 85%. צורה C מכסה פחות מ-15% מהשטח במשותף עם צורה A וכך גם במשותף עם צורה B, לכן מעל 20% מהשטח C מכסה בלי הצורה הראשונה והשנייה. לכן סה"כ 3 צורות ראשונות מכסות לפחות 105% וזה יותר ממה שיש.

ב. נסמן ב-S_1 את כל השטח המכוסה על ידי הצורות, ב-S_2 את השטח שמכוסה לפחות פעמיים, ב-S_3 את השטח שמכוסה לפחות שלוש פעמים, S_4 השטח שמכוסה לפחות 4 פעמים, S_5 השטח שמכוסה על ידי כל 5 הצורות. ברור כי $1 \ge S_1 \ge S_2 \ge S_3 \ge S_4 \ge S_5$, ובנוסף כי בסה"כ השטח המכוסה כאשר סופרים עם ריבוי (כלומר כך שטח שמכוסה N פעמים נספר N פעמים) הוא $2.5 = 5 \cdot \frac{1}{2}$, ולכן $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 2.5$.
לכן $S_2 + S_3 + S_4 + S_5 \ge 1.5$, ובנוסף גם $S_3 + S_4 + S_5 \ge 0.5$.
נסמן ב-D סכום שטחי החיתוכים של הזוגות. סה"כ יש $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ זוגות של צורות, וצריך להוכיח שיש שתי צורות עם חיתוך $\frac{1}{5}$ לפחות, כלומר מספיק להראות כי $D \ge 2$.
בכל שטח שמכוסה פעמיים יש חיתוך של 2 צורות, בכל שטח שמכוסה 3 פעמים יש חיתוך של 3 זוגות של צורות, בכל שטח שמכוסה 4 פעמים יש חיתוך של 6 זוגות של צורות, ובשטח שבוא יש את כל 5 הצורות יש את כל 10 הזוגות, לכן
$$D = S_2 + 3S_3 + 6S_4 + 10S_5.$$
לכן
$$D \ge S_2 + 3S_3 + 3S_4 + 3S_5 = 1.5 + 2 \cdot 0.5 = 2.5,$$
כלומר אפילו יש זוג של קבוצות שנותן חיתוך של לפחות $\frac{D}{10} = \frac{1}{4}$.

ג. נסמן ב-T את סכום שטחי החיתוכים של הצורות בשלשות. סה"כ יש 10 שלשות, לכן מספיק להראות כי $T \ge \frac{1}{2}$. זה לא קשה, הרי כמו בסעיף הקודם ניתן לראות כי $T = S_3 + 4S_4 + 10S_5$, וראינו גם כי $S_3 + S_4 + S_5 \ge \frac{1}{2}$, לכן $T \ge S_3 + S_4 + S_5 \ge \frac{1}{2}$.

2. נתון ריבוע 1×1. עבור איזה M קטן ביותר אפשר להבטיח, שאם מסמנים M נקודות בריבוע אז יהיו שתי נקודות
א. שהמרחק בינם אינו גדול מ-1.
ב. שהמרחק בינם קטן מ-$\frac{1}{2}$.

תשובה. א. 4. ב. 10.
פתרון. א. קל לראות שניתן לסמן 4 נקודות שהמרחקים לא יהיו גדולים מ-1. למשל קודקודי הריבוע.
קל לראות גם שאם מסמנים 5 נקודות, והריבוע מחולק לריבועים $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$, אז יש שתי נקודות באותו הריבוע הקטן, והמרחק בין שתי הנקודות לא עולה על $\frac{\sqrt{2}}{2}$, כלומר קטן מ-1.

ניתן גם לצייר שני ישרים מאונכים כלשהם דרך המרכז. הישרים יחלקו את הריבוע לארבעה מרובעים חופפים. לכל מרובע של חלוקה יהיו שתי זוויות מנוגדות ישרות, לכן המרובע יהיה חסום. קל לראות שהאלכסון הארוך של מרובע יהיה קטן מ-1, ושהוא יהיה גם הקוטר של המעגל החוסם, וגם המרחק הגדול ביותר שיש בו. לכן אם יש שתי נקודות באותו המרובע, המרחק בינם לא עולה על 1 (במקרה מנוון המרובעים יהפכו למשולשים ישר זווית שהיתר של כל אחד מהם באורך 1).
נבחר את שני הישרים המאונכים דרך המרכז כך, שאחד הישרים יעבור דרך אחת הנקודות המסומנות. אז יש נקודה שתשתתף בשני המרובעים. לכן באחד המרובעים יהיו שתי נקודות, ומרחק בינם יהיה קטן או שווה ל-1.

מהוכחה זו אפשר להבין, שאם יש 4 נקודות והמרחקים הם 1 לפחות, אז הנקודות נמצאות על האלכסונים, ומזה לא קשה להשיק שקודקודי הריבוע הם הדוגמה היחידה ל-4 כאשר כל המרחקים הם 1 לפחות.

קל לצייר דוגמה בה יש 3 נקודות וכל המרחקים גדולים מ-1. לוקחים 3 קודקודים רצופים של הריבוע, A,B,C ומזיזים נקודות A,C במרחק קטן לכיוון D.

ב. נחלק את הריבוע ל-9 משבצות $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$. עם יש 10 נקודות, אז יש שתי נקודות באותה משבצת, והמרחק בין 10 שתי נקודות אלה הוא לכל היותר האלכסון של משבצת, שזה $\frac{\sqrt{2}}{3}$, וזה קטן מ-$\frac{1}{2}$.
אפשר לצייר 9 נקודות, כך שכל המרחקים הם לפחות $\frac{1}{2}$: קודקודי הריבוע, אמצעי הצלעות ומרכז הריבוע.

3. במישור סומנו N נקודות, כשכל נקודה נמצאת במרחקים שונים מהנקודות האחרות. במהלך הראשון בוחרים נקודה כלשהי, בכל מהלך נוסף לוקחים נקודה מסומנת שהכי רחוקה מהנקודה שנלקחה בתור הקודם.
א. הוכיחו, כי במהלך ה-N ובמהלך ה-N+2 לוקחים את אותה הנקודה.
ב. עבור איזה K קטן ביות ניתן לטעון, שבהכרח במהלך K בוחרים אותה נקודה כמו במהלך K+2 ? (כמובן, K תלוי ב-N).

תשובה. $K = N - 2$.
פתרון. א. בכל מהלך בוחרים קטע הכי ארוך שמקושר לקודקוד הנוכחי. לכן כל קטע שנשתמש בו שלא זהה לקטע הקודם, יותר ארוך מהקטע הקודם. עם לקטע שמשתמשים בו יש קודקוד משותף עם קטע יותר ארוך, נוכל להשתמש בקטע זה רק פעם אחד: הרי או לפני הקפיצה לאורך הקטע הזה, או אחרי הקפיצה, נרצה להשתמש בקטע היותר ארוך.

לכן בכל קטע שנשתמש נוכל להשתמש רק פעם אחד, אלה אם כן הוא ארוך יותר מכל הקטעים שמתחברים לקצוות שלו, ואז אם נגיע לקטע זה נשתמש בו תמיד.
עד שנגיע לקטע שארוך מכל הקטעים שמתחברים אליו, אנחנו נבקר בכל קודקוד רק פעם אחד, הרי אם היינו מגיעים לאותו קודקוד פעמיים, היינו בוחרים באותו קטע פעמיים, וכל קטע ארוך מהקודם. חוץ משני קצוות הקטע, יש $N-2$ קודקודים בגרף, לכן לפני שנגיע לקטע זה נוכל לעשות לכל היותר $N-2$ קפיצות. אחרי זה בכל שתי קפיצות נחזור למקום המקורי.

ב. לפי מה שהראנו בסעיף א', K הוא לכל היותר $N-2$. נתחיל מדבר שהוא כמעת דוגמה. נבחר מצולע משוכלל עם מספר אי-זוגי M של קודקודים, כאשר $M > N$. לכל קודקוד של מצולע יש שני קודקודים הכי רחוקים (שנמצאים בערך מולו). נבחר מסלול של N קודקודים $A_1, A_2, ..., A_N$, שאף פעם לא חוזר לאותו קודקוד ותמיד הולך לפי האלכסונים הגדולים של המצולע. כעת נמחק את כל הקודקודי של המצולע חוץ מקודקודי המסלול.
צריך להזיז את הקודקודים קצת כדי שעם מתחיל בנקודה A_1 נצטרך לעבור על כל הקודקודים של המסלול בסדר שבחרנו (בכמעט דוגמה שלנו יש תמיד דילמה, איזה משני האלכסונים להשתמש). בשביל זה נרחיק קודקוד A_i מהמרכז של המצולע המשוכלל במרחק $\varepsilon \cdot i$, כאשר ε הוא מספר מאוד קטן (מספיק לדרוש ש-$10N\varepsilon$ יהיה קטן מאשר הפרש בין האלכסון הארוך ביותר של המצולע המשוכלל לכל אלכסון אחר). אז קל לבדוק שדוגמא זו משלימה את ההוכחה.

4. חרגול נמצא בשדה ריבועי. בכל קפיצה החרגול מגיע לאמצע הקטע, שמחבר אותו עם אחד הקודקודים של השדה. בתוך השדה נמצא תחום היעד של החרגול, שהוא עיגול בעל רדיוס ε. האם החרגול יוכל להגיע לתחום היעד, מכל נקודה בשדה?

תשובה. כן.

פתרון ראשון. נבחר מערכת צירים שבה הקואורדינאטות של קודקודים השדה הם $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

בכל קפיצה החרגול יגיע מנקודה (x,y) לנקודה $\left(\frac{x+x_1}{2}, \frac{y+y_1}{2}\right)$, כאשר (x_1,y_1) הם קודקודי הריבוע. לכן אם נרשום את הקואורדינאטות של החרגול בתור שבר בינארי, כל פעם כל הספרות בכל קואורדינאטה מוזזות ימינה, והספרה אחרי הנקודה היא בהתאם לבחירת הקודקוד בקפיצה האחרונה. לכן תוך N קפיצות ניתן להתקרב לכל מספר עם N ספרות דיוק בינאריות, וניתן גם תוך בערך $-\log_2 \varepsilon$ להתקרב למרכז תחום היעד למרחק שקטן מ-ε.

פתרון שני. נפתור בעיה מהסוף: ניקח את תחום היעד. נחשוב: מאיפה צריך לקפוץ בשביל להגיע לתחום היעד (תחום היעד של המהלך שלפני), ומאיפה אפשר להגיע לשם (תחום היעד של שני מהלכים לפני הסוף), וכך הלאה. הקבוצה היא הומותטיה של תחום היעד פי 2 עם מרכז בקודקוד.

אם כל תחום היעד נמצא ברבע ריבוע שקרוב יותר לקודקוד A של ריבוע, אז אפשר לעשות הומותטיה עם מרכז ב-A ותחום היעד יגדל פי 4 בשטחו. כך בכל הומותטיה תחום היעד יגדל פי 4.
אם תחום היעד חותך את הקטעים האמצעים של הריבוע, ניתן לחתוך אותו פי 2 או פי 4 על ידי קטעים אמצעים, ולבחור את החלק הגדול שמתקבל מחלוקה של תחום היעד, ואז לעשות הומותטיה. במקרה זה לאחר הומותטיה תחום היעד לפחות לא יקטן. מרגע זה תחום היעד לא יהיה מעגלי, אלה יהיה לו גבול שמתלכד אם צלע של ריבוע (או אם שני צלעות). האירוע של תפיסת צלע או קודקוד יכול להתרחש רק לא יותר מ-8 פעמים (כי יש רק 8 קודקודים וצלעות לשדה), לכן חוץ מ-8 פעמים בכל מהלך השטח יגדל פי 4, לכן מתישהו תחום היעד יתפוס את כל השדה.

5. נתונים $n > 2$ מעגלים שרדיוסיהם 1 ומרכזיהם $O_1, O_2, \ldots, O_n$. אף ישר לא חותך יותר משני מעגלים נתונים.

א. הוכח/י כי $\sum_{i<j} \frac{1}{O_iO_j} < \frac{n\pi}{4}$.

ב. הוכח/י כי $\sum_{i<j} \frac{1}{O_iO_j} < \frac{(n-1)\pi}{4}$.

פתרון. א. נסתכל מהמרכז של מעגל i. כל ישר שעובר ממנו חותך רק מעגל נוסף אחד. המעגל הנוסף j מכסה ישרים בזווית של α_j, שזה זווית ראיה מ-O_i של המעגל j. הישרים הם דו-כיווניים, לכן $\pi > \sum_{j\neq i} \alpha_j$. מצד שני, $\sin\frac{\alpha_j}{2} = \frac{1}{O_iO_j}$ (הרי קיים משולש ישר זווית שהיתר שלו O_iO_j וניצב הוא 1 והזווית מול הניצב $\frac{\alpha_j}{2}$; משולש זה נוצר על ידי קו המרכזים, רדיוס של מעגל j ומשיק מO_i למעגל j).

לכן $\alpha_j > 2\sin\frac{\alpha_j}{2} = \frac{2}{O_iO_j}$. לכן $\pi > \sum_{j\neq i}\alpha_j > \sum_{j\neq i}\frac{2}{O_iO_j}$, כאשר הסכום הוא לכל $j \neq i$ בהינתן i. עם נחבר על כל ערכי i נקבל $n\pi > \sum_{i<j}\frac{4}{O_iO_j}$, כאשר הסכום כבר על כל ערכי i, j.

ב. נתבונן במשולש $O_1O_iO_j$. המרחק מ-O_i לישר O_1O_j הוא לפחות 2, ולכן $\sin\left(\sphericalangle O_iO_1O_j\right) \geq \frac{2}{O_1O_i}$. לכן $\sphericalangle O_iO_1O_j > \frac{2}{O_1O_i}$, ובדומה $\sphericalangle O_iO_1O_j > \frac{2}{O_1O_j}$.
נניח כי $O_1, O_2, \ldots, O_m$ זה הקמור של מרכזי המעגלים (כאן $m \leq n$). מכל קודקוד של קמור נעביר קטעים לכל המרכזים האחרים. הקטעים מ-O_1 יחלקו את הזווית של הקמור

ל-$n-1$ זוויות, וסכום הזוויות גדולה מסכום של $\frac{2}{O_1O_j}$, כאשר בכל פעם נוכל לבחור או קטע שמאלי או ימני בזווית; אנחנו נבחר כך, שנדלג על הקטע הארוך ביותר O_1O_k, ונבחר את כל הקטעים האחרים פעם אחד בדיוק. נקבל $\sphericalangle O_1 > \sum_{i\neq 1,k}\frac{2}{O_1O_i} \geq \frac{n-2}{n-1}\cdot\sum_{i\neq 1}\frac{2}{O_1O_i}$.
כאן $\sphericalangle O_1$ הוא זווית של קמור. נסכם על כל הזוויות של קמור:

$$(m-2)\pi = \sum_{i=1}^{m}\sphericalangle O_i > \frac{n-2}{n-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\neq i}\frac{2}{O_iO_j}$$

נשים לב כי $\frac{n-2}{n-1} = 1-\frac{1}{n-1} \leq 1-\frac{1}{m-1} = \frac{m-2}{m-1}$, ולכן $m-1 \geq \frac{n-1}{n-2}\cdot(m-2)$,
לכן $(m-1)\pi \geq \frac{n-1}{n-2}\cdot(m-2)\pi > \sum_{i=1}^{m}\sum_{i\neq j}\frac{2}{O_iO_j}$.
עבור מרכזים שהם לא חלק מהקמור נשתמש באי-שוויון היותר חלש של הסעיף הקודם $\pi > \sum_{j\neq i}\frac{2}{O_iO_j}$, ומכאן $(n-m)\pi \geq \sum_{i=m+1}^{n}\sum_{i\neq j}\frac{2}{O_1O_i}$. ביחד הקודקודים של הקמור והקודקודים שבפנים נותנים אי-שוויון $(n-1)\pi \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j}\frac{2}{O_iO_j} = \sum_{i<j}\frac{4}{O_iO_j}$. מש"ל.

6. נתון עיגול ברדיוסו 1. יוסי מעביר K קווים ישרים, ויעל מציירת מצולע קמור, שמוכל בעיגול הנתון. יעל מגלה ליוסי לגבי כל ישר שהוא בחר, האם הישר חותך את המצולע. בהסתמך על המידע הזה, יוסי מנסה לנחש את היקף המצולע של יעל.
א. אם K = 100, האם יוסי יכול לנחש עם שגייה של פחות מ-0.03 ?
ב. אם K = 2000, האם יוסי יכול לנחש עם שגייה של פחות מ-0.003 ?

א. לא. ב. לא

פתרון. א. נניח שיוסי העביר 100 קטעים ועדיין לא חתך את המצולע אף פעם. הקטעים מחלקים את המעגל ל-200 קשתות (לכל היותר). לכן הקשת הארוכה ביותר מבין הקשתות האלה זה לפחות $\frac{2\pi}{200} \geq \frac{2\cdot 3.14}{200} \geq 0.0314$. המיתר שמחבר את שתי קצוות הקשת באורך 0.0314, אורכו (לפי נוסחת טיילור) הוא

$$2\sin\left(\tfrac{1}{2}0.0157\right) \geq 2\cdot 0.0157 - \frac{1}{4}\cdot\frac{0.0157^3}{6!} > 0.0314 - 0.01^3 > 0.0313$$

כלומר היקף התחום בין הקשת למיתר הוא לפחות 0.0627. אפשר להכניס בסגמנט זה מצולע קמור שהיקפו לפחות 0.62, וגם מצולע קמור שהיקפו 0.00001.
לכן כל ניחוש של יוסי יכול להיות שגוי: אם הוא יגיד מעל 0.031 זה עלול להיות יותר מדי, ואם יגיד 0.031 או פחות זה עלול להיות מעט מדי.
ב. סעיף זה קצת קשה מדי.