תרגיל 3

1. א. הוכח/י כי בהינתן $a+b+c=2p$ מתקיים

$$a(p-a)^2+b(p-b)^2+c(p-c)^2+2(p-a)(p-b)(p-c)=abc.$$

ב. אם בנוסף $a^2+b^2+c^2=2q$, אז מתקיים

$$(q-a^2)(q-b^2)+(q-b^2)(q-c^2)+(q-c^2)(q-a^2)=$$
$$=4p(p-a)(p-b)(p-c)$$

פתרון. א. נסמן $z=\frac{a+b-c}{2}$, $y=\frac{a+c-b}{2}$, $x=\frac{b+c-a}{2}$.

אז $c=x+y$, $b=x+z$, $a=y+z$, ובנוסף $p-c=z$, $p-b=y$, $p-a=x$.

לכן צריך להוכיח כי

$$(y+z)x^2+(x+z)y^2+(x+z)z^2+2xyz=(x+y)(x+z)(y+z),$$

וזה ברור מפתיחת סוגריים.

ב. באגף ימין מקבלים:

$$4p(p-a)(p-b)(p-c)=4\cdot\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}=$$
$$=\frac{1}{4}\left((a+b)^2-c^2\right)\left(c^2-(a-b)^2\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(2ab+a^2+b^2-c^2\right)\left(c^2-a^2-b^2+2ab\right)=\frac{1}{4}\left(4a^2b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(4a^2b^2-\left(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2\right)\right)=\frac{1}{4}\sum_{cyc}\left(2a^2b^2-a^4\right)$$

כעת נפתח את אגף שמאל:

$$(q-a^2)(q-b^2)+(q-b^2)(q-c^2)+(q-c^2)(q-a^2)=$$
$$=\sum_{cyc}(q-a^2)(q-b^2)=\sum_{cyc}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-a^2\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-b^2\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{cyc}\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)=\frac{1}{4}\sum_{cyc}\left(b^4-\left(c^2-a^2\right)^2\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{cyc}\left(b^4-c^4-a^4+2a^2c^2\right)=\frac{1}{4}\sum_{cyc}\left(-a^4+2a^2b^2\right)$$

כלומר אותו הדבר.

2. הוכח/י כי לכל n טבעי

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2n-5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}}{n}$$

פתרון. נשים לב כי:

$$2\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-3}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2n-5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}+1\right)=$$

$$=\frac{2n}{1(2n-1)}+\frac{2n}{3\cdot(2n-3)}+\frac{2n}{5\cdot(2n-5)}+\ldots+\frac{2n}{(2n-1)\cdot 1}$$

נחלק את שני האגפים ב-$2n$ ונקבל מש"ל.

3. פשט/י את הביטוי

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)(a-x)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)(b-x)}+\frac{c^k}{(c-b)(c-a)(c-x)}$$

עבור $k=1,2$.

תשובה. $\frac{x^k}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

פתרון. כמובן ניתן לפתוח סוגריים, אבל אנו נציג פתרון אלגנטי מבוסס על הנוסחה המפורסמת של לגרנז'.

ידוע, שבהינתן $x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots,x_n,y_n$ קיים ויחיד הפולינום מדרגה קטנה מ-n שמקיים

$$p(x_1)=y_1\ ,\ p(x_2)=y_2\ ,\ \ldots\ ,\ p(x_n)=y_n\ .$$

קל להראות יחידות: לו היו שני פולינומים שונים מסוג זה, הפרשם היה פולינום שדרגתו קטנה מ-n ויש לו n שורשים. קיום יותר קשה להראות, ויש כמה שיטות לזה. אחת השיטות נקראת נוסחת לגרנז', ידוע גם בשם נוסחת האינטרפולציה.

הרעיון פשוט: ננחש קודם פולינום p_k המקיים

$$p_k(x_1)=0\ ,\ \ldots\ ,\ p_{k-1}(x_k)=0\ ,\ p_k(x_k)=1\ ,\ p_k(x_{k+1})=0\ ,\ldots\ ,\ p_k(x_n)=0$$

ואחר כך נרכיב פולינום $p(x)=\sum_{i=1}^{n}y_k p_k(x)$. קל לנחש כי $p_k(x)=\frac{\prod_{i\neq k}(x-x_i)}{\prod_{i\neq k}(x_k-x_i)}$,

ולכן הפולינום $p(x)=\sum_{k=1}^{n}y_k\cdot\frac{\prod_{i\neq k}(x-x_i)}{\prod_{i\neq k}(x_k-x_i)}$ יעשה את העבודה.

כעת נפתור את השאלה. מהנוסחה של לגרנז', עבור $k=0,1,2$

$$\frac{a^k(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^k(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^k(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^k.$$

נחלק את שני האגפים ב-$(a-x)(b-x)(c-x)$ ונקבל:

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)(a-x)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)(b-x)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)(c-x)}=$$

$$=\frac{x^k}{(a-x)(b-x)(c-x)}$$

עבור $k=1,2,3$. מש"ל.

הערה. מה אם ניקח $k=3$? הרי x^3 לא שווה ל-

$$\frac{a^3(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

אומנם שני הפולינומים מזדהים על a,b,c, אבל x^3 מדרגה 3, ולכן משפט לגרנז' כמו שהוא לא עובד, אבל אפשר להמשיך אם הגישה של משפט לגרנז'. הפרש בין שני הפולינומים מתאפס ב-a,b,c בו זמנית, ולכן זו כפולה של $(x-a)(x-b)(x-c)$.

מהשוואת המקדמים של x^3 רואים כי

$$\frac{a^3(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=$$

$$=x^3-(x-a)(x-b)(x-c)$$

נחלק את שני האגפים ב-$(a-x)(b-x)(c-x)$ ונקבל

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-x)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)(b-x)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)(c-x)}=$$

$$=\frac{x^3}{(a-x)(b-x)(c-x)}+1$$

4. נתון כי $\sin\beta=\frac{1}{5}\cdot\sin(2\alpha+\beta)$. הוכח/י כי $\tan(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}\cdot\tan\alpha$.

פתרון. $2\alpha+\beta=\alpha+(\alpha+\beta)$, ולכן

$$\sin(2\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta).$$

כמו כן $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$ ולכן

$$\sin\beta=\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)$$

אז מה שנתון, שבמקור היה $5\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$, אפשר לרשום בצורה

$$5\left(\cos\alpha\cdot\sin\left(\alpha+\beta\right)-\sin\alpha\cdot\cos\left(\alpha+\beta\right)\right)=$$

$$=\cos\alpha\cdot\sin\left(\alpha+\beta\right)-\sin\alpha\cdot\cos\left(\alpha+\beta\right)$$

$$4\cos\alpha\cdot\sin\left(\alpha+\beta\right)=6\sin\alpha\cdot\cos\left(\alpha+\beta\right)$$

נחלק ב-$4\cos\alpha\cdot\cos\left(\alpha+\beta\right)$ ונקבל $\tan\left(\alpha+\beta\right)=\frac{3}{2}\tan\alpha$. מש"ל.

5. סדר/י את המספרים הבאים בסדר עולה:

$$A=\sqrt{\frac{\sqrt[5]{1}+\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{5}}}\qquad B=\sqrt[5]{1+\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{8}}\qquad C=\frac{\sqrt[5]{16}+\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{2}-1}{\sqrt[5]{125}}$$

תשובה. $A=B=C$.

פתרון. לשם קיצור נסמן $u=\sqrt[5]{2}$. נוכיח קודם כי $A=B$. ברור ששניהם חיוביים, אז מספיק להוכיח כי $A^{10}=B^{10}$, כלומר $\frac{\left(1+u^2\right)^5}{5}=\left(1+u+u^3\right)^2$. כלומר

$$\frac{1+5u^2+10u^4+10u^6+5u^8+u^{10}}{5}=1+u^2+u^6+2u+2u^3+2u^4$$

$$\frac{1+u^{10}}{5}+\cancel{u^2}+\cancel{2u^4}+2u^6+u^8=1+\cancel{u^2}+u^6+2u+2u^3+\cancel{2u^4}$$

כעת נזכר כי $u^5=2$, ונקבל

$$\frac{1+4}{5}+u^6+2u^3=1+2u+2u^3$$

כלומר $1+2u=1+2u$, וזה ברור.

כעת נוכיח כי $A=C$. ברור ששניהם חיוביים, לכן מספיק לבדוק כי $A^2=C^2$, כלומר

$$\frac{1+u^2}{\sqrt[5]{5}}=\frac{\left(u^4+u^3+u-1\right)^2}{\sqrt[5]{5^6}}$$

$$5\left(1+u^2\right)=\left(\left(u^2+1\right)\left(u^2-1\right)+\left(u^2+1\right)u\right)^2$$

$$5=\left(u^2+1\right)\left(u^2+u-1\right)^2$$

$$5=\left(u^2+1\right)\left(u^4+u^2+1+2u^3-2u^2-2u\right)$$

$$5=\left(u^2+1\right)\left(u^4+2u^3-u^2-2u+1\right)$$

$$5=u^6+2u^5-2u+1$$

נזכר, כי $u^5=2$ ולכן צ"ל $5=2u+4-2u+1$ וזה ברור.

6. הצג/י את $\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}$ ואת $\sqrt[3]{\frac{2-\sqrt[5]{27}}{\sqrt[5]{5}}}$ בצורה $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}$, כאשר n מספר טבעי, והמספרים a,b,c רציונאליים (בשני המקרים n יכול להיות שונה).

תשובה.

א. $\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25}\right)=\sqrt[3]{\frac{2}{27}}+\sqrt[3]{\frac{20}{27}}-\sqrt[3]{\frac{25}{27}}$

ב. $\sqrt[3]{\frac{2-\sqrt[5]{27}}{\sqrt[5]{5}}}=\sqrt[5]{\frac{1}{25}}+\sqrt[5]{\frac{3}{25}}-\sqrt[5]{\frac{9}{25}}$

פתרון. א. נסמן $q=\sqrt[3]{5}$, $p=\sqrt[3]{2}$. צריך לבדוק כי $\sqrt{q-p^2}=\frac{1}{3}\left(p+p^2q-q^2\right)$.

מתחשק להעלות את שני האגפים בריבוע, ובשביל זה צריך ל להצדיק חיוביות של הביטוי $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25}$. זה לא קשה: הרי $27>25>20>8$ ולכן $3>\sqrt[3]{25}>\sqrt[3]{20}>2$, ולכן $\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25}>-1$, לכן $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25}>0$. לכן מספיק להוכיח כי

$$q-p^2=\frac{1}{9}\left(p+p^2q-q^2\right)^2$$

$$9\left(q-p^2\right)=p^2+p^4q^2+q^4+2p^3q-2pq^2-2p^2q^3$$

כאשר $q^3=5$, $p^3=2$ כלומר צ"ל

$$9\left(q-p^2\right)=p^2+\cancel{2pq^2}+5q+4q-\cancel{2pq^2}-10p^2$$

$$9\left(q-p^2\right)=9q-9p^2$$

וזה ברור.

ב. נסמן $r=\sqrt[5]{3}$, ונעלה את שני האגפים של הזהות בחזקה שלישית:

$$\frac{2-r^3}{\sqrt[5]{5}}=\frac{\left(1+r-r^2\right)^3}{\sqrt[5]{5^6}}$$

$$5\cdot\left(2-r^3\right)=\left(1+r-r^2\right)^3$$

$$10-5r^3=\left(1+r-r^2\right)\left(1+r^2+r^4+2r-2r^2-2r^3\right)$$

$$10-5r^3=\left(1+r-r^2\right)\left(1+2r-r^2-2r^3+r^4\right)$$

$$10-5r^3=1+3r-5r^3+3r^5-r^6$$

$$9=3r+3r^5-r^6$$

נזכר כי $r^5=3$ ונקבל שצריך להוכיח כי $9=3r+9-3r$ וזה ברור.