תרגיל 3

1. א. הוכח/י כי בהינתן $a+b+c=2p$ מתקיים

$$a(p-a)^2+b(p-b)^2+c(p-c)^2+2(p-a)(p-b)(p-c)=abc.$$

ב. אם בנוסף $a^2+b^2+c^2=2q$, אז מתקיים

$$(q-a^2)(q-b^2)+(q-b^2)(q-c^2)+(q-c^2)(q-a^2)=$$
$$=4p(p-a)(p-b)(p-c)$$

2. הוכח/י כי לכל n טבעי

$$\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}}{n}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2n-5}+...+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{1}.$$

3. פשט/י את הביטוי

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)(a-x)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)(b-x)}+\frac{c^k}{(c-b)(c-a)(c-x)}$$

עבור $k=1,2$.

4. נתון כי $\sin\beta=\frac{1}{5}\cdot\sin(2\alpha+\beta)$. הוכח/י כי $\tan(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}\cdot\tan\alpha$.

5. סדר/י את המספרים הבאים בסדר עולה:

$$A=\sqrt{\frac{\sqrt[5]{1}+\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{5}}}\qquad B=\sqrt[5]{1+\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{8}}\qquad C=\frac{\sqrt[5]{16}+\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{2}-1}{\sqrt[5]{125}}$$

6. הצג/י את $\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}$ ואת $\sqrt[3]{\frac{2-\sqrt[5]{27}}{\sqrt[5]{5}}}$ בצורה $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}$, כאשר n מספר טבעי, והמספרים a,b,c רציונאליים (בשני המקרים n יכול להיות שונה).