תרגיל 2

אני ממליץ לא להיות עצלנים ולצייר ציורים טובים כאשר אתם קוראים את הפתרון.
כמובן, יכולתי לצייר ציורים בשבילכם, אבל למקרה שבאולימפיאדה לא יהיה איתכם אותי,
צריך להתחיל להתרגל מעכשיו.

1. נקודה O נמצאת בתוך מרובע ABCD. נתון כי קיימים ארבעה מעגלים שונים בעלי אותו רדיוס, שכל אחד מהם עובר דרך O ומשיק לשתי צלעות סמוכות של משולש ABCD. הוכיחו כי המרובע ABCD חסום.

פתרון. נסמן את מרכזי ארבעה המעגלים העוברים דרך O, בתור X,Y,Z,T (כאשר מעגל שמרכזו X משיק לצלעות הסמוכות ל-A, מעגל שמרכזו Y משיק לצלעות הסמוכות ל-B, וכך הלאה). מכיוון שהמעגלים עוברים דרך O ובעלי אותו רדיוס, אז הנקודות X,Y,Z,T נמצאות על אותו מעגל שמרכזו O, ולכן המרובע XYZT חסום. לכן סכום הזוויות X, Z במרובע זה 180°.
מצד שני, הקטעים XY, YZ, ZT, TX מקבילים לקטעים AB, BC, CD, DA בהתאמה. לכן זויות A, C של מרובע ABCD שוות לזוויות X, Z של מרובע XYZT. לכן גם סכום הזוויות A, C של מרובע ABCD זה 180°, ולכן המרובע ABCD חסום. מש"ל.

2. נתון משולש ABC, ונקודות K, N, M על הצלעות BC, AB, AC בהתאמה, כך ש-$\sphericalangle BKN = \sphericalangle BAC = \sphericalangle CKM$. נסמן ב-I את נקודת המפגש של BM ו-CN. הוכיחו כי המרובע MINA חסום במעגל.

פתרון. כידוע, במרובע קמור XYZT סכום זויות X ו-Z שווה 180°, אם ורק אם הוא חסום. ניסוח שקול לאותו תנאי, זה שהזווית הפנימית ב-X שווה לזווית החיצונית ב-Z.
לפי קריטריון זה, המרובעים ABKM, ACKN חסומים (הרי בשניהם זווית A פנימית שווה לזווית K חיצונית לפי הנתון). היות ושני זויות הנשענות על אותה קשת שוות,

$$\sphericalangle AMI = \sphericalangle AMB = \sphericalangle AKB$$
$$\sphericalangle ANI = \sphericalangle ANC = \sphericalangle AKC$$

ולכן $\sphericalangle AMI + \sphericalangle ANI = \sphericalangle AKB + \sphericalangle AKC = 180^\circ$,
כלומר המרובע MINA חסום.

3. על הצלעות AB ו-CD של ריבוע ABCD נבחרו נקודות K ו-L בהתאמה. על הקטע KL נבחרה נקודה M. הוכיחו כי המעגלים החוסמים של המשולשים AKM, CLM נפגשים גם בנקודה שנמצאת על האלכסון AC.

פתרון. בשאלה זו נשתמש בזוויות מכוונות. זווית מכוונת $\sphericalangle(XY,ZT)$ זאת זווית, בה צריך לסובב את הישר XY נגד כיוון השעון על מנת שיתלכד עם הישר ZT (או יהיה מקביל לו, תלוי במרכז הסיבוב). זווית מכוונת מוגדרת בעצם מודולו.
זוויות מכוונות עוזרות לחסוך בדיקות מקרים.

למשל, בזוויות מכוונות $\sphericalangle(XY,ZT)+\sphericalangle(ZT,UV)=\sphericalangle(XY,UV)$, להבדיל מהזוויות הרגילות עבורן יש דרכים שונות לבחור סימנים בזהות זו, בהתאם למיקום היחסי של הישרים.
תכונה חשובה אחרת: אם נקודות שונות בזוגות X, Y, Z, T הן על מעגל אחד, אך ורק כאשר $\sphericalangle(XY,YZ)=\sphericalangle(XT,TZ)$. גם זה שונה מהזוויות הרגילות, בהן התנאי מגדיר שתי קשתות מעגליות סימטריות ביחס ל-XZ.
בדומה אפשר לנסח עוד תכונות עם זוויות מכוונות, כמו למשל להכליל את נוסחת סכום הזוויות במצולע שתעבוד לא רק עבור מצולע קמור.

ובכן, תהי N נקודת מפגש נוספת של שני המעגלים הנתונים בשאלה. אזי
$$\sphericalangle(MN,NA)=\sphericalangle(MK,KA)=\sphericalangle(LK,KA)$$
$$\sphericalangle(MN,NC)=\sphericalangle(ML,LC)=\sphericalangle(KL,LC)$$
לכן
$$\sphericalangle(NA,NC)=\sphericalangle(NA,MN)+\sphericalangle(MN,NC)=$$
$$=\sphericalangle(KL,KA)+\sphericalangle(LC,KL)=\sphericalangle(LC,KA)=180^\circ$$
לכן N נמצא על AC, מש"ל.
באופן דומה ניתן להוכיח שכאשר שני המעגלים הנתונים משיקים, אז M נמצא על AC:
בשביל זה צריך להחליף בכל הנוסחאות שרשמנו את MN בישר שמשיק לשני המעגלים ב-M, ואת להחליף את N ב-M בכל מקום בו Nשהוא מופיע בלי M.

4. במרובע ABCD חוצי זויות של הזוויות החיצוניות הם $\ell_A,\ell_B,\ell_C,\ell_D$ בהתאמה. זוגות ישרים ℓ_A ו-ℓ_B, ℓ_B ו-ℓ_C, ℓ_C ו-ℓ_D, ℓ_D ו-ℓ_A נחתכים בנקודות P, Q, R, S בהתאמה. הוכיחו כי אם האנכים מנקודות P, Q, R לצלעות AB, BC, CD בהתאמה נפגשים בנקודה אחת, אז המרובע ABCD חסום.

פתרון. נניח שהאנכים הנ"ל נפגשים בנקודה O. נכניס סימונים עבור הזוויות בין צלעות המרובע ABCD לישרים $\ell_A,\ell_B,\ell_C,\ell_D$:
$$\alpha=\sphericalangle PAB=\sphericalangle SAD\ ,\ \beta=\sphericalangle PBA=\sphericalangle QBC$$
$$\gamma=\sphericalangle QCB=\sphericalangle RCD\ ,\ \delta=\sphericalangle SDA=\sphericalangle RDC\ .$$
נתבונן במשולש OPQ. הקטעים AB, BC פוגשים את הקטעים OP, OQ בהתאמה בזוויות ישרות בנקודות K, L. המשולשים PKB, QLB דומים: הרי זוויות K, L ישרות, וזוויות B שוות, לכן $\sphericalangle OQP=\sphericalangle LQB=\sphericalangle KPB=\sphericalangle OPQ$. ובכן, משול OPQ שווה שוקיים, $OP=OQ$. באופן דומה $OQ=OR$.
במרובע PQRS הזוויות הם
$$\sphericalangle P=180^\circ-\alpha-\beta\ ,\ \sphericalangle Q=180^\circ-\beta-\gamma\ ,$$
$$\sphericalangle R=180^\circ-\gamma-\delta\ ,\ \sphericalangle S=180^\circ-\delta-\alpha$$
כמו שרואים מסכום הזוויות במשולשים PAB, QBC, RCD, SDA.
לכן $\sphericalangle P+\sphericalangle R=360^\circ-\alpha-\beta-\gamma-\delta=\sphericalangle Q+\sphericalangle S$. כלומר PQRS מרובע חסום.
כבר ראינו, כי $OR=OQ=OP$, לכן O הוא המרכז של המעגל החוסם את PQRS.

נזכר, כי הנקודה Q נמצאת על מפגש חוצה זווית בין הישרים AB, BC עם חוצה הזווית בין הישרים BC, CD לכן Q נמצאת במרחק שווה מהישרים AB, BC, CD, בפרט במרחק שווה מהישרים AB, CD. באופן דומה גם S נמצאת במרחק שווה מהישרים AB, CD. לכן הישר QS הוא חוצה זווית בין הישרים AB, CD אם הישרים לא מקבילים, או הקו שמקביל לשניהם ונמצא במרחק שווה משניהם במקרה שהישרים מקבילים. בכל מקרה, הישרים AB, CD, QS נפגשים בנקודה אחת או שלושתם מקבילים.

טענה. אם הישרים IN, JL, MK נפגשים בנקודה אחת או שלושתם מקבילים, והמרובעים JINL, MJLN חסומים, אז גם המרובע MINK גם חסום.

נוכיח את הטענה בסוף הפתרון. לפי הטענה, מספיק לבדוק שהמרובעים AQSB, CQSD חסומים. זאת בעצם אותה טענה, הרי על AB ו-CD יש את אותם התנאים. לכן נשאר להוכיח כי AQSB חסום.

תהיה T נקודת מפגש של PO ו-AB (בזווית ישרה, כזכור), ו-Z נקודה סימטרית ל-P ביחס ל-O. אז PZ הוא קוטר של המעגל PQRS, לכן הזוויות PQZ, PSZ ישרות.
גם הזוויות PTA, PTB ישרות. מכאן רואים, שהמשולש PTA דומה למשולש PSZ, ומשולש PTB דומה למשולש PQZ (הרי בכל זוג משולשים יש זווית P משותפת וזווית ישרה בנוסף). לכן $PA \cdot PS = PT \cdot PZ = PB \cdot PQ$. מכאן המרובע BAQS חסום.
זה מסיים את ההוכחה, ונשאר רק להוכיח את הטענה.

הוכחת הטענה. במקרה ששלושת הישרים מקבילים, כל מרובע חסום הוא טרפז שווה שוקיים, והאנך האמצעי לקטעים IN, JL, MK הוא אותו הקו (לפי שני המעגלים הנתונים), ולכן גם MINK הוא טרפז שווה שוקיים.
במקרה ששלושת הישרים נפגשים בנקודה X, אז ניתן לרשום (בקטעים מכוונים)

$$MX \cdot XK = JX \cdot XL = IX \cdot XN$$

שני הזהויות שהשתמשנו בהם שקולים לכך, שהמרובעים JINL, MJLN חסומים, והשוויון $MX \cdot XK = IX \cdot XN$ שמתקבל אומר, ש-MINK מרובע חסום. מש"ל.

5. המעגל α משיק באופן חיצוני למעגל β, שמשיק באופן חיצוני למעגל γ, שמשיק באופן חיצוני למעגל δ, שמשיק באופן חיצוני למעגל α. הוכיחו כי הארבעה הישרים שהם המשיקים הפנימיים המשותפים לזוגות מעגלים משיקים אלה כולם עוברים בנקודה אחת, או שכולם משיקים לאותו המעגל.

פתרון. נסמן את מרכזי המעגלים A, B, C, D ואת רדיוסיהם r_α, r_β, r_γ, r_δ (של α, β, γ, δ בהתאמה). אז כל לחשב את הצלעות של ABCD באמצעות הרדיוסים (כמו למשל $AB = r_\alpha + r_b$) ומכאן רואים כי $AB + CD = r_\alpha + r_\beta + r_\gamma + r_\delta = BC + DA$, כלומר במרובע ABCD ניתן לחסום מעגל שמרכזו O.
היטלי הנקודה O לצלעות המרובע AB ו-BC נמצאים במרחק שווה מ-A, לכן גם במרחק שווה מנקודות ההשקה של β עם המעגלים α ו-γ. לכן O נמצאת במרחק שווה ממשיקים המשותפים הפנימיים של המעגל β עם המעגלים α ו-γ. באותה דרך רואים, כי O נמצאת במרחק שווה מכל המשיקים הנתונים. לכן או ש-O נמצאת על המשיקים הנתונים (כאשר המרחק הוא O) או שקיים מעגל שמרכזו O שמשיק לארבעה הישרים.

6. מעגל שעובר דרך נקודות A ו-B של משולש ABC חותך את הצלע BC בנקודה D. מעגל נוסף שעובר דרך נקודות B ו-C חותך את הצלע AB ב-E וחותך את המעגל הראשון פעם נוספת ב-F. בנוסף נתון כי הנקודות A, E, D, C נמצאות על מעגל שמרכזו O. הוכיחו, כי הזווית BFO ישרה.

פתרון ראשון. מרובעים BCFE, BDFA חסומים.
לכן $\sphericalangle BCF = \sphericalangle FEA$, וגם $\sphericalangle CDF = \sphericalangle FAB$.
לכן המשולשים CDF, EFA דומים לפי שני זוויות.
יהיו L, K אמצעי CD, AE בהתאמה. אז FL, FK הם תיכונים במשולשים הדומים CDF, EFA, ולכן הם יוצרים זוויות שוות אם הצלעות המתאימות $\sphericalangle FKA = \sphericalangle FLB$.
לכן המרובע KFLB חסום.
מצד שני, O בתור מרכז המעגל CDEA, לכן הוא נמצא על האנכים האמצעים של CD ושל AE. לכן OK, OL הם האנכים מ-O ל-AB, BC בהתאמה. לכן מעגל שקוטרו BO עובר דרך K ו-L. אבל זה המעגל BLK, לכן הוא עובר גם דרך F.
ובכן, F נמצא על מעגל שקוטרו BO, לכן $\sphericalangle BFO = 90^\circ$, מש"ל.

פתרון שני. נסתכל על התמונה הפוך: יש מרובע CAED, שחסום במעגל שמרכזו O, המשכי הצלעות CD ו-AE נגשים ב-B, מעגלים BEC ו-BAD נפגשים שוב ב-F. צ"ל כי $\sphericalangle BFO = 90^\circ$.
נבצע אינברסיה עם מרכז ב-B, שתחליף בין C ל-D. אינברסיה זו תשמור על המעגל CAED, לכן היא גם תחליף בין A ל-E. המעגלים BAD ו-BEC יהפכו לאלכסוני המרובע EC ו-AD, ולכן F יהפוך לנקודת מפגש האלכסונים G. O יעבור ל-T, שניתן להגדיר אותו גם בתור נקודת המפגש של BO עם המיתר KL, כאשר M ו-N הם נקודות ההשקה של שני המשיקים BN ו-BM מנקודה B למעגל CAED.
הישר MN הוא מאונך ל-BO, עקב סימטריה של המעגל ביחס ל-BO.
ובכן, במקום להוכיח $\sphericalangle BFO = 90^\circ$, ניתן להוכיח כי $\sphericalangle BGT = 90^\circ$, במילים אחרת מספיק להוכיח כי נקודת מפגש האלכסונים G היא על MN.
נעשה הטלה מרכזית של המישור, שתשלח לאינסוף ישר מסוים, שעובר דרך B ולא נוגע במעגל CAED, ואז המעגל יהפוך לאליפסה.
לאחר הטלה חסום באליפסה המרובע C'A'E'D', ויש על האליפסה בנוסף גם נקודות M', N' כך שהישרים A'E', C'D' וגם המשיקים בנקודות M', N' כולם מקבילים (כלומר נפגשים בנקודה אינסופית B'). צריך להוכיח כי M'N', A'D', C'E' נפגשים בנקודה אחת. ניתן לעשות העתקה אפינית (מתיחה בציר מסוים), שתשמור על כל תכונות התמונה ותהפוך את האליפסה למעגל, ואז ברור שלתמונה יש סימטריה ביחס לישר M'N', לכן הישרים אכן נפגשים בנקודה אחת.

הערה. הסוף של הפתרון השני מזכיר שאלה מגניבה אחרת: מרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו I, אלכסוניו AC, BD נפגשים בנקודה K, המשכי הצלעות הנגדיות AB, CD נפגשים בנקודה M, המשכי הצלעות הנגדיות BC, AD נפגשים בנקודה N.
הוכיחו, כי I זו נקודת מפגש הגבהים של MNK.