# תרגיל 1

**1. א.** כמה דרכים יש לצבוע קוביה ב-6 צבעים שונים נתונים, שכל פאה תהיה בצבע שונה? הצביעות שנבדלות רק בסיבוב נחשבות שקולות.
**ב.** אותה שאלה עבור כל 4 הפאונים המשוכללים האחרים: חשב/י את כמות הצביעות של ארבעון משוכלל ב-4 צבעים נתונים, של תמניון משוכלל ב-8 צבעים, תריסרון משוכלל ב-12 צבעים, ועשרימון ב-20 צבעים.

**פתרון. א.** קל לחשב כמות את הצביעות בהנחה שאסור לסובב קוביה: זה $6!$.
כל קבוצה של צביעות הקוביה שאסור לסובב, שהיה ניתן להפוך זה לזה באמצעות סיבוב מתאימה לצביעה של קוביה שאפשר לסובב אותם. כל סיבוב משנה חלק מהצבעים על הקוביה, לכן גודל של מחלקה של צביעות של קוביה מקובעת שמתאימה לצביעה של קוביה שמותר לסובב שווה לכמות הסיבובים האפשריים.
נספור את כמות הסיבובים האפשריים. כל אחת מבין 6 פאות יכולה להיות למעלה. כאשר קובעים איזה פאה למעלה, יש 4 דרכים לסובב את הקוביה, לכן בסה"כ יש 24 סיבובים.
ובכן, $6!$ צביעות של קוביה מקובעת מחולקות למחלקות בגודל 24, וכל מחלקה מתאימה לצביעה של קוביה שמותר לסובב, לכן יש בסה"כ $\frac{6!}{24}=1\cdot 2\cdot 3\cdot 5=30$ צביעות.
**ב.** באופן דומה, לארבעון מקובע יש $4!$ צביעות, ויש $4\cdot 3=12$ סיבובים, לכן יש $\frac{4!}{12}=2$ צביעות. דרך אחרת לראות את זה: תמיד ניתן לשים את הפאה האדומה למעטה, ואז אפשר לסובב כך שהפאה הלבנה תהיה מקדימה, ואז יש בדיוק שני דרכים לבחור לגבי שתי הפאות האחרות איזה כחולה ואיזה ירוקה.
באופן דומה ניתן לפתור לכל פאון אחר: לתמניון מקובע יש $8!$ צביעות, ויש $8\cdot 3$ סיבובים, לכן יש $\frac{8!}{8\cdot 3}$ צביעות, בדומה לתריסרון יש $\frac{12!}{12\cdot 5}$ צביעות, ולעשרימון יש $\frac{20!}{20\cdot 3}$ צביעות.

**2.** מספר חיובי שלם שקטן מ-$10^6$ יקרא מוצלח, אם סכום ספרותיו מתחלק ב-13. הוכח/י כי סכום כל המספרים המוצלחים
**א.** מתחלק ב-13.
**ב.** מתחלק ב-169.

**פתרון.** לכל מספר 6-ספרתי $\overline{abcdef}$ ניתן להגדיר מספר מסובב $\overline{bcdefa}$ (אם למספר יש פחות מ-6 ספרות, נוסיף אפסים בהתחלה כך שיהיו 6 ספרות בדיוק). כאשר מפעילים סיבוב על המספר 6 פעמים, נקבל מספר מקורי. סה"כ באמצעות סיבובים ניתן לקבל ממספר $k$ מספרים שונים, כאשר $k$ הוא בהכרח מחלק של 6. לכל המספרים שניתן לקבל ממספר כלשהו נקרא **המסלול** של המספר.
סכום כל המספרים במסלול הוא $111111\cdot\left(a+b+c+d+e+f\right)/k$. נשים לב, כי אם המספר מוצלח, אז גם כל המספרים במסלול שלו מוצלחים. לכן אפשר לסכם את כל

המספרים המוצלחים לפי מסלולים שלהם. אם המספר מוצלח, אז $a+b+c+d+e+f$ מוצלח, וגם 111111 מתחלק ב-13, וכמובן $k$ זר ל-13, הרי $k\le 6$, ולכן הסכום בכל מסלול של מספרים מוצלחים מתחלק ב-$13^2$.

**3.** פיצה מחולקת ל-$p$ "משולשים" שווים (כאשר $p$ ראשוני), ועל כל משולש אפשר לשים אחת מ-$a$ תוספות. כמה פיצות שונות אפשר לייצר? (פיצות שנבדלות רק בסיבוב נחשבות לשקולות).

תשובה. $\frac{a^p-a}{p}+a$.

**פתרון.** כמות הפיצות שאפשר לייצר בלי להתחשב בסיבובים היא $a^p$. ביניהן יש כל מיני פיצות שקולות. אם על פיצה כלשהי כל המשולשים עם אותה תוספת, היא לא משתנה כשמסובבים אותה. כאלה יש $a$ פיצות. אם פיצה כלשהי מכילה לפחות 2 תוספות, אז יש בדיוק $p$ פיצות שמתקבלות ממנה ע"י סיבוב. זה נותן עוד $\frac{a^p-a}{p}$ פיצות, עד כדי סיבוב.

סה"כ $\frac{a^p-a}{p}+a$ פיצות שונות.

ולמה לפיצות עם 2 תוספות שונות ומעלה, יש בדיוק $p$ פיצות השקולות לה? נסמן ב-$k$ את גודל הסיבוב המינימאלי (ביחידות של $2\pi/p$) שיש לבצע כדי לחזור לאותה הפיצה. אם $k=1$ אז כל הסיבובים של הפיצה זהים, אבל זה לא ייתכן כי יש עליה לפחות 2 תוספות. כמו כן, אם $k$ לא מחלק של $p$ אז אם r שארית החלוקה של $p$ ב-$k$, גם אחרי סיבוב בגודל $r$ נחזור לאותה פיצה, בסתירה למינימאליות של $k$. לכן בהכרח $k$ מחלק של $p$ ומכיוון ו-$p$ ראשוני, $p=k$.

**4.** $p$ ראשוני אי-זוגי. כמה תתי-קבוצות יש בקבוצה $\{1,2,3,...,2p\}$ שסכום איבריהם מתחלק ב-$p$?

תשובה: $\frac{4^p-4}{p}+4$.

פתרון: הרעיון דומה – נאמר שקבוצה היא טובה עם סכום איבריה מתחלק ב-$p$. נתבונן בפעולה הבאה על תת-קבוצות: להוסיף 1 לכל איברי הקבוצה מודולו $2p$. אם בקבוצה $m$ איברים, כל פעולה כזו מוסיפה לסכום הקבוצה בדיוק $m$. נניח ש-$m$ זר ל-$p$. לאחר $2p$ פעולות נחזור לקבוצה המקורית. יהי $k$ מספר פעולות מזערי עבורו נחזור לאותה קבוצה, אזי $k$ מחלק את $2p$, כלומר שייך ל-$\{1,2,p,2p\}$. קל להראות ש-$k$ שונה מ-1 ו-2. לאחר $k$ פעולות נקבל בדיוק $k/p$ קבוצות טובות. כלומר $1/p$ מהן טובות. לכן בדיוק $\frac{1}{p}$ מהקבוצות טובות (מגודל זר ל-$p$). יש $4^p-\binom{2p}{p}-2$ קבוצות שגודלן זר ל-$p$. לכן

מביניהן יש בדיוק $\frac{1}{p}\left(4^p-\binom{2p}{p}-2\right)$ קבוצות טובות. נותר לספור כמה קבוצות טובות יש מגודל $0,p,2p$. יש קבוצה טובה אחת עם 0 איברים ואחת עם $2p$ איברים. כמה קבוצות טובות יש עם $p$ איברים? את זה נפתור שוב בעזרת מסלולים:
נחלק את הקבוצה $\{1,....,2p\}$ ל-2 חלקים: $\{1,...,2p\}=\{1,...,p\}\cup\{p+1,...,2p\}$. הפעולה תהיה להוסיף 1 מודולו $p$ לכל איברי הקבוצה שב-$\{1,...,p\}$.
נחלק למקרים: אם כל $p$ האיברים בחלק הראשון נקבל קבוצה טובה אחת. כנ"ל לגבי החלק השני. אחרת, מבין כל $p$ קבוצות שהתקבלו כך ע"י הפעולה, יש בדיוק אחת טובה. סה"כ נקבל 2 קבוצות טובות מהסוג הראשון, ועוד 1 מכל $p$ קבוצות מהסוג השני. קבוצות מהסוג השני יש: $\binom{2p}{p}-2$, ואחת מכל $p$ טובה, לכן נקבל כך בסה"כ $\frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p}-2\right)+2$.
נסכם הכול ונקבל: $\frac{1}{p}\left(4^p-\binom{2p}{p}-2\right)+2+\frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p}-2\right)+2=\frac{4^p-4}{p}+4$.

**5.** בשורה N מקומות חנייה. בכניסה כל רכב מקבל פתק עם מספר המקום שבו הוא אמור לחנות. המכונה שמחלקת פתקים מגרילה כל פעם מספר מ-1 עד N עם סיכויים שווים, בלי קשר לפתקים הקודמים (יתכן ששני רכבים יקבלו אותו מספר). כל רכב מגיע למקום המיועד לו לפי הפתק, ומנסה לחנות שם; אם המקום תפוס, אז הוא מתקדם למקום הבא ומנסה לחנות בו, וכך הלאה. אם רכב מסוים מגיע למקום N ולא מצליח לחנות שם, הוא יוצא מהחניון. מה הסיכוי לכך, ש-K רכבים יגיעו לחניון ריק וכולם יצליחו לחנות?

תשובה. $\frac{(N+1-K)\cdot(N+1)^{K-1}}{N^K}$.

**פתרון.** הסיכוי, כמו בהרבה בעיות על הסתברויות, זה כמות האפשרויות הטובות חלקי כמות כל האפשרויות. כמות כל האפשרויות זה $N^K$, כמות האפשרויות הטובות הפעם זה החלק הקשה של השאלה (אבל אפשר לנחש אם מציבים מספרים קטנים).
נדמיין מצב, שהחניה שלנו מעגלית ומכילה $N+1$ מקומות. אז אם מישהו יגיע למקום N שיהיה תפוס, פשוט ימשיך למקום $N+1$, ואם גם זה יהיה תפוס אז ימשיך למקום 1 וכך הלאה. בסופו של דבר כולם ימצאו מקום, כל עוד $K\le N+1$. מבחינת השאלה המקורית, המצבים הרעים זה כאשר המקום $N+1$ תפוס. נרשה למכונה להפיק גם כרטיסים עם פתק $N+1$ (זה רק יוסיף מצבים רעים, ולא ישנה את כמות המצבים הטובים). סה"כ כרגע יש $(N+1)^K$ אפשרויות להתנהגות המכונה.
מצד שני, כרגע לשאלה יש סימטריה סיבובית. בסופו של דבר יש $N+1-K$ חניות פנויות, והסיכוי לכל חנייה ספציפית להיות פנויה הוא $\frac{N+1-K}{N+1}$, לכן הסיכוי שהמצב הוא טוב, כלומר חניה $N+1$ פנויה, זה $\frac{N+1-K}{N+1}$, לכן יש $(N+1-K)\cdot(N+1)^{K-1}$ מצבים טובים. לכן הסיכוי הוא $\frac{(N+1-K)\cdot(N+1)^{K-1}}{N^K}$.

**6.** נתונה חפיסה רגילה של 52 קלפים (בחפיסה יש קלפים מ-4 צבעים, ובכל צבע יש קלפים שמייצגים 13 מספרים). נגיד שהחפיסה מסודרת נכון אם מתקיימים 3 תנאים:
כל שני קלפים צמודים הם בעלי אותו מספר או אותו צבע,
הקלף העליון והקלף התחתון גם הם בעלי אותו מספר או אותו צבע,
הצבע של הקלף העליון הוא תלתן, ומספר שרשום עליו הוא 1.
הוכח/י שכמות הדרכים לסדר את החפיסה נכון
**א.** מתחלקת ב- !12 .
**ב.** מתחלקת ב- !13 .

פתרון.
**א.** אנחנו נחלק את כל החפיסות הטובות לקבוצות כך שבכל קבוצה יש בדיוק !12 חפיסות נכונות.
שתי חפיסות נכונות שייכות לאותה קבוצה אם אפשר להחליף את המספרים על הקלפים במצב אחד ולקבל מצב אחר, כאשר המספר 1 נשאר כמו שהיה.
כך יש תמורה על 12 מספרים אחרים, וכיוון שיש !12 תמורות על 12 מספרים וחפיסה נכונה לאחר פעולה כזאת נשארת טובה, אז בכל קבוצה יש בדיוק !12 חפיסות נכונות טובות. לכן כמות החפיסות הטובות מתחלקת ב- !12.

**ב.** אחרי סעיף א' נשאר רק להוכיח שכמות של חפיסות נכונות מתחלקת ב-13. נבצע תמורה על מספרי הקלפים בלי לשנות את הצבעים: 1 יעבור ל-2,
2 יעבור ל-3, . . . , 12 יעבור ל-13, 13 יעבור ל-1. החפיסה שתצא לא תהיה נכונה, כי הקלף העליון הוא אומנם תלתן אך מספרו לא 1.
נוריד סדרה של קלפים מלמעלה ונעביר אותם למטע (באותו סדר) כך שהקלף 1 תלתן יעבור למעלה (פשוט נוריד למעטה את כל הקלפים שמעליו).
פעולה הזאת כבר מעבירה חפיסה נכונה לחפיסה נכונה.
אחרי שמבצעים את הפעולה הזאת 13 פעמים חפיסה חוזרת לקדמותה.
בצורה כזאת מחלקים את החפיסות הנכונות לקבוצות כאלה שיש 13 חפיסות בכל קבוצה.
כדי להשתכנע בזה צריך עוד להוכיח שאף חפיסה נכונה לא תחזור לקדמותה לפני 13 פעולות.
הפעולות שלנו מורכבות משני חלקים: תמורה על מספרים וסיבוב החפיסה (העברת קלפים מלמעלה למטע). נניח בשלילה שיש חפיסה נכונה שעוברת לעצמה אחרי פחות מ-13 פעולות כאלה. היות ותמורה על מספרים לא משנה את הצבעים, זאת אומרת שסיבוב מסוים גם שומר על הצבעים.
זאת אומרת שכל אחד מהצבעים מופיע באופן מחזורי בחפיסה (במרחקים שווים). כלומר בחפיסה נכונה זאת אין שני קלפים צמודים באותו צבע. היות והחפיסה נכונה, אז לכל שני קלפים צמודים אותו מספר. לכן לכל הקלפים בחפיסה יש את אותו מספר. סתירה.