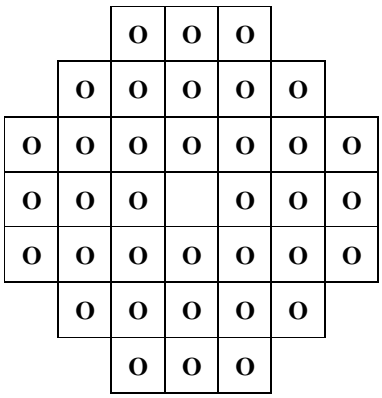
אינווריאנטים

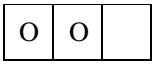
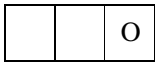
1. על הלוח רשומים מספרים 1, 2, 3, ... , 100. בכל מהלך מוחקים שני מספרים כלשהם באופן אקראי a,b ומחליפים אותם ב-$a+b+ab$. הוכיחו שהמספר שיישאר בסוף לא תלוי בבחירות של המספרים.

2. באי חיות 17 זיקיות אפורות, 15 זיקיות ירוקות ו-13 זיקיות חומות. כאשר שתי זיקיות מצבע שונה נפגשות, שתיהן מחליפות צבע לצבע השלישי (למשל אם זיקית אפורה וזיקית חומה נפגשו שתיהן הופכות להיות ירוקות וכו'). האם יכול לקרות שכעבור כמה זמן כל הזיקיות באי יהיו באותו צבע?

3. א. כמה מלבנים בגודל 1×4 אפשר לחתוך מריבוע 10×10?
ב. כמה מלבנים בגודל 1×5 אפשר לחתוך מריבוע 8×8?

4. נתון משחק (התמונה בציור). בכל צעד של המשחק חייל (O) יכול לקפוץ מעל חייל אחר למשבצת ריקה במאונך או במאונך, החייל שמעליו קפצו מורד מהלוח.



לדוגמא  הופך ל- 

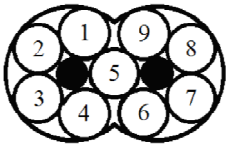
מהו המספר המינימלי של חיילים שאפשר להשאיר בסוף המשחק?

5. אותו משחק אבל על לוח אינסופי כאשר המצב ההתחלתי הוא שהחיילים ממלאים ריבוע N×N. מהו מספר החיילים המינימלי שאפשר להשאיר לכל N?

6. נתונות שתי רשימות של מספרים: האחת 1, 6, 11, ..., 96 והשנייה 4, 9, 14, ..., 99. בכל תור מוחקים שני מספרים מאחת הרשימות ורושמים את שליש הסכום שלהם (שאינו בהכרח שלם) ברשימה השנייה. ממשיכים בתהליך כל עוד אפשר.
א. הוכח שבסוף התהליך יישאר בדיוק מספר אחד בכל אחת מהרשימות.
ב. הוכח ששני המספרים האלה שונים.

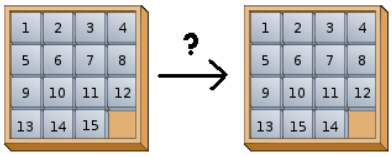
בתאבון!

תמורות



1. משחק שבציור מורכב מ-9 דיסקים ממוספרים, כאשר ניתן להזיז דיסקים בשני המעגלים. האם ניתן להחליף בין 1 ל-2?

2. משחק ה-15 הוא לוח 4×4 עם 15 אבנים ריבועיות עליו בגודל 1×1. בכל צעד ניתן להחליק על גבי הלוח את אחת האבנים הסמוכות לאבן החסרה אל האבן החסרה.



האם ניתן להגיע מהמצב שבו כל האבנים במקומן פרט ל 14 ו 15 למצב שבו כל האבנים במקומן ?

3. עדו משחק במשחק מחשב. במשחק יש שורה של 200 כדורים צבעוניים ב-100 צבעים: שני כדורים מכל צבע. בתחילת המשחק, כל שני כדורים מאותו צבע נמצאים במרחק 100 זה מזה (כלומר ביניהם בשורה יש 99 כדורים אחרים בדיוק). בכל מהלך, עדו בוחר זוג כדורים סמוכים והמחשב משנה את הסדר שלהם. אם בשלב מסוים של המשחקי שני כדורים מאותו צבע נצמדים, המחשב מעלים אותם. המשחק מסתיים כאשר כל הכדורים נעלמים. האם עדו יכול לסיים את המשחק תוך 5773 מהלכים בדיוק?

4. מה התנאי לכן, שמכפלה של $n-1$ החלפות על מספרים $\{1,2,3,...,n\}$ תיתן מעגל באורך n?

5. מלך האלפים מניח כרטיסים שממוספרים מ-1 עד 101 בשורה בסדר אקראי עם הפנים למטה. הוא הודיע ל-13 הגמדים, שמחר הוא יאמר לכל גמד בתורו מספר; הגמד יכנס לאולם ויחפש את הכרטיס המתאים, כאשר מותר לו לבדוק פחות ממחצית מהכרטיסים. אם הוא יצליח, המלך ישחרר אותו מהכלא. באולם בו נמצאים הכרטיסים יש שמירה במהלך כל הלילה, אבל בילבו בגינס יכול להתגנב, להסתכל על כל הכרטיסים, ולהחליף שניים מהם. לבילבו יש הזדמנות לדבר עם הגמדים לפני שהוא מתגנב לאולם, אך לא אחרי. האם יצליחו כל הגמדים להשתחרר?

6. 100 גמדים עומדים בשורה. על לכל אחד מלבישים כובע לבן או שחור. כל אחד רואה רק את הכובעים של אלה שלפניו. לאחר מכן, כל אחד לפי הסדר כאשר האחורי ראשון והקדמי אחרון, מנסה לנחש את הצבע הכובע שלו. תארו אסטרטגיה, שתאפשר לכמות מרבית של גמדים לנחש נכון. (מותר להם לתאם אסטרטגיה מראש.)

7*. 1000 חכמים מסתדרים בשורה. יש כובעים הממוספרים מ-1 עד 1001. כובע אחד מוחבא, ואת האחרים מלבישים על החכמים בסדר אקראי. כל חכם רואה רק את הכובעים של אלה שלפניו. לאחר מכן, כל חכם לפי הסדר כאשר האחורי ראשון והקדמי אחרון, אומר בקול רם מספר שלם. כל מספר שאומרים צריך להיות בין 1 ל-1001, אבל אסור להגיד מספר שכבר נאמר. תוצאת המבחן היא כמות החכמים שאמרו את מספר הכובע שלהם. החכמים יודעם מראש את תנאי המבחן ויכולים לסכם איך לפעול.

א. האם הם יכולים להבטיח תוצאה גדולה ממש מ-500?

ב. האם הם יכולים להבטיח תוצאה של לפחות 999?

8*. כמה מצבים יש לקוביה הונגרית?

בתאבון!