משחקים

במשחקים שנדון בהם יש שני שחקנים שמשחקים בתורות, והמפסיד הוא זה שלא יכול לבצע מהלך בתורו. לגבי כל משחק נסו להבין, לאיזה שחקן יש אסטרטגיה מנצחת:

1. בערמה N אבנים. בכל תור אחד מהם לוקח בין 1 ל-4 אבנים לפי בחירתו.

2. בערמה אחת של N אבנים ובשנייה K אבנים. בכל תור מותר לקחת כמות אבנים כלשהי מערמה אחת לפי בחירת השחקן.

3. בערמה N אבנים. בכל תור מותר לקחת כל כמות של אבנים, שהיא חזקה של 2.

4. בערמה N אבנים. בכל תור מותר לקחת כל כמות של אבנים, שהיא ריבוע של משפר שלם חיובי.

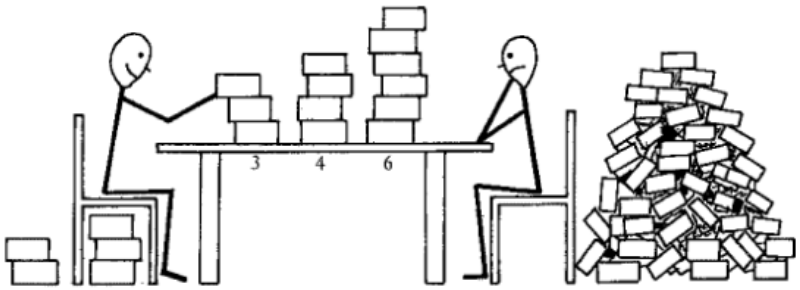
5. רבע לוח אינסופי (משבצות שמספר שורה ומספר עמודה שלהם חיוביים שניהם), ועליו ממוקם פרש שחמט. מותר לפרש ללכת בארבע כיוונים, שמקטינים את הסכום של מספר שורה ומספר עמודה שלו.

6. אותו סוג של לוח, אבל עם צריח, שגם הוא צריך בכל צעד להקטין את סכום מספר שורה ומספר עמודה שלו.

7*. אותו סוג של לוח, אבל עם מלכה, שגם כאן צריך בכל צעד להקטין את סכום מספר שורה ומספר עמודה שלה.

8. לשני פיראטים יש שני שקי מטבעות ויהלום אחד. הם מחלקים את המטמון בצורה הבאה: כל פיראט בתורו לוקח כמות זוגית של מטבעות מאחד השקים, שם חצי מזה בשק השני ואת השאר משאיר לעצמו. כשפיראט לא יכול לעשות מהלך כזה הוא מפסיד והפיראט השני לוקח לעצמו את היהלום (שהרבה יותר יקר משני שקי המטבעות). לאילו כמויות התחלתיות של מטבעות הפיראט הראשון יכול לזכות ביהלום בוודאות?

9. משחק נים: נתונות 3 ערמות של 3, 4 ו-6 אבנים בכל תור מותר לקחת כמות אבנים כלשהי מערמה אחת לפי בחירת השחקן.



10. נתונות שתי ערמות של אבנים. בתחילת המשחק בערמה ראשונה M אבנים, ובשנייה N. בכל מהלך, אחד השחקנים מוציא מערמה הגדולה מספר אבנים שהוא כפולה של מספר האבנים שיש בערמה האחרת. המהלכים מתבצעים לפי התור על ידי שני שחקנים. מי שמחסל את אחת הערמות, מנצח.

א. אם $M > 2N$, הוכח שהראשון מנצח.

ב. עבור כל המקרים האחרים, לאיזה שחקן יש אסטרטגיה מנצחת?

11. דיסקים דו-צדדיים נמצאים בשורה, כמו בציור. ניתן לבחור דיסק שחור (זנב), דיסק שנמצא משמאל אליו (לא בהכרח ברצף) ולהפוך את שני הדיסקים.



12. משחק נים, אבל כאשר מותר לשחקן בתורו להוסיף מספר אבנים שלו לערמה בתורו (במקום לקחת).

13. נתונות מספר ערמות של אבנים. בכל מהלך מותר לבחור ערמה, לקחת ממנה מספר אבנים, ולאחר מכן מותר (אבל לא חייבים) לפצל את מה שנישאר בערמה לשתי ערמות.

14. א. נתונה שורת משבצות $n \times 1$. בחלק מהמשבצות יש צריחים. בכל תור שחקן בוחר צריח ומזיז אותו שמאלה (כאשר אסור לקפוץ מעל הצריח הבא).

ב. נניח בנוסף מותר שבכל מהלך במקום להזיז צריכים להוריד את הצריח השמאלי מהלוח, ואחד הצריכים עשוי כסף, והשחקן שיוריד את צריח הכסף מהלוח יפסיד.

15. עוד גרסה של נים: כמו נים רגיל, אבל אסור לעשות שתי ערמות באותו גודל.