תרגיל במשוואות פונקציונאליות

1. א. (קנדה) מצאו את כל הפולינומים P בעלי מקדמים ממשיים כך ש-
$(x+1)P(x-1)-(x-1)P(x)=const$.

ב. (בלרוס, ס. מאזניק) מצאו את כל הפולינומים P המקיימים
$(x-1)P(x+1)-(x+1)P(x-1)=4P(x)$.

2. (שווייץ) מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, כך שלכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים
$y\cdot f(2x)-x\cdot f(2y)=8xy\left(x^2-y^2\right)$.

3. (בלרוס, א. וורונוביץ') מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עבורן
$f(x+y)+y\le f\left(f\left(f(x)\right)\right)$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$.

4. (בלרוס, ד. פירשטוק & א. וורונוביץ') מצאו את כל זוגות הפונקציות $f,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות $f\left(x^2+y\cdot h(x)\right)=x\cdot h(x)+f(xy)$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$.

5. (שווייץ) מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$, עבורן לכל $a,b,c,d>0$ המקיימים $abcd=1$ מתקיים $\left(f(a)+f(b)\right)\left(f(c)+f(d)\right)=(a+b)(c+d)$.

6. (בלרוס, א. וורונוביץ') מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עבורן
$\left(f(x)-f(y)\right)(u-v)=\left(f(u)-f(v)\right)(x-y)$
לכל $x,y,u,v\in\mathbb{R}$ המקיימים $x+y=u+v$.

7. (בלקן) מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$ עבורן שלושת התנאים הבאים מתקיימים לכל $x,y,z,k\in\mathbb{R}^+$:

(a) $x\cdot f(x,y,z)=z\cdot f(z,y,x)$,

(b) $f\left(x,ky,k^2z\right)=k\cdot f(x,y,z)$,

(c) $f(1,k,k+1)=k+1$.

8. (שווייץ) מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$, עבורן לכל $x>y>0$ מתקיים
$f\left(\frac{x}{y+1}\right)=1-x\cdot f(y+x)$.

9. (גרמניה) מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}_{\ge0}\to\mathbb{R}_{\ge0}$ עבורן $f(1)=\frac{1}{2}$ ובנוסף
$f\left(y\cdot f(x)\right)\cdot f(x)=f(x+y)$ לכל $x,y\in\mathbb{R}_{\ge0}$.

10. (נ. ניקולוב, בולגריה) מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, שחסומות בקטע $(0,1)$, ועבור כל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים
$x^2\cdot f(x)-y^2\cdot f(y)=\left(x^2-y^2\right)\cdot f(x+y)-xy\cdot f(x-y)$.

11. יהא $0\ne m\in\mathbb{Z}$. מצאו את כל הפולינומים P בעלי מקדמים ממשיים, המקיימים
$\left(x^3-mx^2+1\right)\cdot P(x+1)+\left(x^3+mx^2+1\right)\cdot P(x-1)=2\left(x^3-mx+1\right)P(x)$.

בהצלחה!