ספירה כפולה

1. הוכיחו כי $\sum k(n-k)=\sum_{k\le n}\binom{k}{2}$.

2. (אורנג') במדינה מסוימת יש 5 ערים גדולות ו-19 ערים קטנות (עיר גדולה זו עיר שיש בה מעל מיליון תושבים). המדינה מחולקת ל-9 אזורים. מכל עיר גדולה יש קווי אוטובוס ישירים ל-14 ערים אחרות לפחות. מכל עיר קטנה יש קווי אוטובוס ישירים ל-3 ערים אחרות לכל היותר. כל קווי האוטובוס במדינה הם קווים דו כיווניים. הוכח שיש אזור בו אין אף שני ערים שמקושרות על ידי קו אוטובוס ישיר.

3. חשב את: $\sum_{k\le 1000}\left[\sqrt[3]{k}\right]$.

4. יהא $\mathbb{F}$ שדה סופי בגודל q. מצא את הכמות של מרחבים k-ממדיים במרחב n ממדי מעל $\mathbb{F}$.

5. (גיליס) בממשלה של מדינה זרה 12 שרים. לכל שר יש 5 חברים ו-6 אויבים בממשלה. כל 3 שרים מרכיבים ועדה. ועדה נקראת מתוקנת אם כל חבריה חברים או שכל חבריה אויבים. כמה ועדות מתוקנות יש?

6. האם קיים פאון קמור שבו בכל פאה יש לפחות 6 קודקודים?

7. ספרים מסודרים ב- K מדפים. סידרו אותם מחדש ב- K + 1 מדפים.
הוכח שיש ספר עבורו במדף החדש יש פחות ספרים מאשר במדף הקודם.
תרגיל המשך: הוכח שיש 2 ספרים כאלו.

8. הוכיחו כי בכל מצולע שקודקודיו שלמים ואף צלע שלו לא מקבילה לקווי רשת, סכום אורכי קטעי הרשת האופקיים שמוכלים במצולע שווה לסכום אורכי קטעי הרשת האנכיים שמוכלים במצולע.

9. נתונה מפה שבה F_3 ארצות משולשיות, F_4 ארצות מרובעות, F_5 ארצות מחומשיות וכך הלאה. הוכיחו כי $3F_3+2F_4+F_5-F_7-2F_8-3F_9-\ldots\ge 12$.

10. (IMO) בתחרות מסוימת יש n (אי-זוגי) שופטים, ו- m מתחרים. כל שופט נותן ציון לכל מתחרה, וכל ציון הוא 1 או 0. k הינו מספר ההסכמים המרבי בין כל זוג שופטים. הוכח כי $\frac{k}{m}\ge\frac{n-1}{2n}$.

11. (IMO) בהינתן $1\le r\le n$, נתבונן בכל תתי-הקבוצות בגודל r של $\{1,2,\ldots,n\}$, ובכל תת-קבוצה נמצא את הערך המינימלי. חשבו את הממוצע של הערכים האלה.

12. (גרוסמן 2011) מדינת טריגוניה רוצה לשלוח צוותי הצלה ליפן בעקבות רעידת האדמה. בכל צוות צריך להיות רופא, אחות וכבאי. לרשות המארגנים עומדים 10 רופאים, 10 אחיות ו-10 כבאים. מסיבות שונות לא כל בחירה של (רופא, אחות, כבאי) אפשרית. המארגנים מנו את כל השלשות שהן כן אפשריות, וגילו שיש 501 כאלה. הוכיחו שאפשר לשלוח לפחות 6 צוותים.

13. (אורנג') יש 13 מנורות במעגל. מתחת לכל מנורה יש מתג שמשנה מצב של 3 מנורות סמוכות עליו. בהתחלה יש מצב כלשהו של מנורות. צריך לשנות מצבי מתגים כדי שבסוף יהיה דלוקה מנורה אחת (כלשהי). מהו המספר המרבי של שינויי מתגים שצריך לעשות?

14. (Lubell-Yamamoto-Meshalkin) בקבוצה עם N איברים, אוסף $\{A_i\}$ של תתי-קבוצות שונות של הקבוצה מקיים $A_i \not\subset A_j$ לכל $i \neq j$. הוכח כי $\sum \binom{N}{|A_i|}^{-1} \leq 1$.

15. (IMO) בתחרות מתמטית, בה היו 6 שאלות, כל זוג שאלות נפתרו על ידי יותר מאשר $\frac{2}{5}$ מהמתחרים. בנוסף לכך, אף מתחרה לא פתר את כל השאלות. הוכיחו שיש 2 מתחרים שפתרו 5 שאלות כל אחד.

16. (IMO) 21 בנים ו21 בנות השתתפו בתחרות מתמטית. בסוף התחרות התגלה, שכל מתחרה פתר לא יותר מ-6 שאלות, ולכל זוג של בן ובת הייתה לפחות שאלה אחת ששניהם פתרו. הוכח כי יש שאלה שנפתרה על ידי 3 בנים ו3 בנות (לפחות).

17. (IMO) יהי $p_n(k)$ כמות התמורות של הקבוצה $\{1,2,3,...,n\}$ עם בדיוק k נקודות שבת. הוכח כי $\sum_{k=1}^{n} k p_n(k) = n!$.

שאלת המשך: $\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{\ell} p_n(k) = \frac{n!}{\ell!}$.

18. נתון מצולע קמור שאינו משולש. המצולע מחולק למשולשים (מותר לקודקוד של משולש אחד להיות על צלע של משולש אחר). הוכח כי קיים לפחות זוג אחד של משולשי החלוקה שיש להם צלע שלמה משותפת.

19. נתונה קבוצה של n מעגלים במישור, כולם בעלי רדיוס 1. ידוע כי כל מעגל נחתך עם לפחות עוד מעגל, ושאף זוג מעגלים אינם משיקים. הוכח כי כמות נקודות החיתוך השונות של המעגלים היא לפחות n.

20. נתונים $S_1, S_2, ..., S_m \subseteq \{1,2,...,n\}$ קבוצות שונות ולא ריקות. בנוסף נתון גם $|S_i \cap S_j| = 1$ לכל $i \neq j$. הוכח כי $m \leq n$.

21. נתונים $S_1, S_2, ..., S_n \subseteq \{1,2,...,n\}$ קבוצות כך ש- $|S_i| \geq 2$ לכל i. נניח שלכל קבוצה $S \subseteq \{1,2,...,n\}$ בת שני איברים בדיוק קיים ויחיד i כזה ש- $S \subseteq S_i$. הוכח כי $S_i \cap S_j \neq \varnothing$ לכל $i \neq j$.

22. נתונים $S_1, S_2, ..., S_n \subseteq \{1,2,...,10\}$ קבוצות כך ש- $|S_i| = 5$ לכל i, וגם $|S_i \cap S_j| \leq 2$ לכל $i \neq j$. מצא את ה- n המקסימלי עבורו זה אפשרי.

23. הוכח כי $\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$.