תרגיל משבצות

1. במשבצת מרכזית של לוח 101×101 נמצא בית. המשבצות האחרות צבועות בשני צבעים: ישר ופנייה. מכונית נכנסת ללוח מאחת המשבצות על ההיקף, לפי בחירת הנהג, דרך אחת מגבולות הלוח. בכל משבצת בצבע ישר היא ממשיכה באותו כיוון ובכל משבצת בצבע פנייה היא פונה ימינה או שמאלה לפי בחירת הנהג. האם לכל צביעה אפשר להגיע לבית?

2. דף משבצות אינסופי נצבע תחילה בשחור ולבן לפי צביעת שח. לאחר מכן המשבצות הלבנות נצבעו בכחול ואדום לפי זוגיות של שורות. בנוסף, נתון קטע ישר שאינו אופקי ואינו אנכי. הוכיחו, כי קיים קבוע M כך שלכל קטע ישר שמקביל לקטע הנתון, הפרש בין החלק האדום שלו והחלק הכחול שלו הוא לא עולה על M בערכו המוחלט.

3. ישר שלם הוא ישר שעובר דרך שתי נקודות שלמות. כמה ישרים שלמים משיקים למעגל שמרכזו ב-$(0,0)$ ורדיוסו 1?

4. נתון לוח משבצות $m\times n$ וצורה מסוימת שמורכבת ממשבצות. הוכיחו שאי-אפשר לכסות את הלוח באמצעות צורות מהסוג הנתון כך שכל משבצת תהיה מכוסה באותו מספר של שכבות, אם ורק אם אפשר לרשום מספרים ממשיים בכל המשבצות, כך שבכל הלוח הסכום חיובי, וכל צורה שאפשר לשים על הלוח תכסה משבצות עם סכום שלילי.

5. נתון לוח $n\times m$ שחור לבן. בכל מהלך מסמנים מלבן שמורכב ממשבצות שלמות, והופכים את צבעי כל המשבצות במלבן זה. המטרה הי להלבין את הלוח.

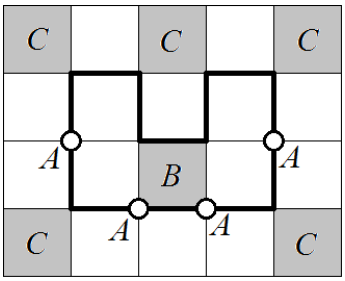
א. כמה מהלכים צריך כשמתחילים מצביעת שח בלוח 8×8?

ב. כמה מהלכים צריך במקרה הגרוע בלוח 7×7?

ג. כמה מהלכים צריך כשמתחילים במקרה הגרוע בלוח כללי ?

6. פינה זה 3 משבצות שנמצאות באותו ריבוע 2×2. באיזה מקרים ניתן לכסות לוח $m\times n$ בפינות, כך שכל משבצת תהיה מכוסה באותו מספר של שכבות?

7. נתון לוח משבצות $m\times n$, כאשר $m,n\geq4$. העבירו קו שבור סגור לפי צלעות המשבצות שעובר בכל $(n-1)\times(n-1)$ צמתים פנימיים פעם אחד בדיוק ולא נוגע בגבולות הלוח. נסמן ב-A את כמות המשבצות שאף צלע שלהם לא חלק של הקו השבור. נסמן ב-B את כמות כל המשבצות שבדיוק שתי צלעות נגדיות שלהן הן חלק של המסילה. נסמן ב-C את כמות הצמתים של הרשת שדרכם הקו עובר ישר.



הוכיחו כי $A-B+C=m+n-1$.

בתאבון!