תרגיל התלתן

1. (IMO 2006) יהי I מרכז המעגל החסום במשולש ABC. תהי P נקודה בתוך המשולש המקיימת $\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB$. הראו כי $AP \geq AI$, וכי שוויון מתקיים אם ורק אם $P = I$.

2. הכלילו את נוסחת אוילר למקרה של מעגל חסום מבחוץ: $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$.

3. BC הוא קוטר של מעגל שמרכזו O. A היא נקודה כלשהי על המעגל המקיימת $\sphericalangle AOC > 60^\circ$. המיתר EF הוא האנך האמצעי של AO. D היא אמצע הקשת AB (הקצרה). הישר דרך O שמקביל ל-AD פוגש את AC בנקודה J. הוכח כי J הוא מרכז המעגל החסום של CEF.

4. נתונים שני מעגלים, אחד בתוך השני. מנקודה C על המעגל החיצוני מעבירים משיקים למעגל הפנימי, שחותכים שנית את המעגל החיצוני בנקודות A ו-B. מצאו את המקום הגיאומטרי של מרכז המעגל החסום של משולש ABC (כשהנקודה C זזה על המעגל).

5. משולש ABC חסום במעגל. יהיו P ו-Q אמצעי הקשתות מול A ו-B בהתאמה. הישר P, Q חותך את הצלעות AC ו-BC בנקודות U ו-V. יהיה I מרכז המעגל החסום במשולש ABC. הוכיחו כי CUIV מעוין.

6. פתרו באמצעות הטענה של שאלה 5 את שאלת החולצה האדומה:
נתון משולש ABC. קודקודיו מחלקים את המעגל החוסם ל-3 קשתות, ואמצעי הקשתות הללו יסומנו P, Q, R (של BC, AC, AB בהתאמה). הקטע PQ חותך הקטע BC ב-U ואת הקטע AC ב-V. הקטע QR חותך את הקטע AC ב-W ואת AB ב-X. הקטע PR חותך את הקטע AB ב-Y ואת הקטע BC ב-Z.
הוכח\י כי UX, VY, WZ נפגשים בנקודה אחת.

7. משולש ABC חסום במעגל S. אמצעי הקשתות AB, CA, BC הם P, Q, R בהתאמה. יהיו S_1, S_2, S_3 מעגלים שמרכזיהם P, Q, R בהתאמה ושמשיקים לישרים AB, CA, BC בהתאמה. הוכיחו שניתן לבחור משיק חיצוני משותף לכל זוג מעגלים מבין S_1, S_2, S_3, כך ששלושת המשיקים יפגשו בנקודה אחת.

בתיאבון!