תרגיל בתורת מספרים

בתרגיל זה כל המספרים הנתונים שלמים, ומספר p תמיד ראשוני.

1. מספר $5n^2+1$ מתחלק ב-p. הוכיחו שספרת העשרות של p זוגית.

2. הוכח כי לכל x,y שלמים המספר $\frac{x^2+1}{y^2-5}$ אינו שלם.

3. הוכיחו כי יש אינסוף ראשוניים מסוג $4k+1$ ומסוג $6k+1$.

4. מצאו את כל ה-n-ים עבורם ניתן לחלק את הקבוצה $\{n,n+1,n+2,...,n+1997\}$ למספר מחלקות, כך שבכל מחלקה המכפלה תהיה זהה.

5. הוכיחו כי $\sum_{y=0}^{p-1}\left(\frac{y^2+a}{p}\right)=\begin{cases}-1, & p\nmid a\\ p-1, & p\mid a\end{cases}$.

6. המספר n^4-n^2+1 מתחלק ב-p. מצאו את p מודולו 12.

7. הוכח כי אחד המספרים $1,2,3,...,\lceil\sqrt{p}\rceil$ אינו ריבוע מודולו p.

8. יהיה $p>3$ ראשוני, כך שספרת היחידות של 2^p היא 8, וגם $2p+1$ ראשוני. היתכן ש-2^p-1 ראשוני?

9. הוכח שיש אינסוף זוגות של ראשוניים שונים p,q שעבורם $2^{p-1}-1$ מתחלק ב-q ובו-זמנית $2^{q-1}-1$ מתחלק ב-p.