תרגיל בתורת המספרים

1. הוכיחו כי אם $a|b^3\ ,\ b|c^3\ ,\ c|a^3$ אז $abc|(a+b+c)^{13}$.

2. יהי n מספר טבעי. הוכיחו כי קיימים n טבעיים עוקבים, כך שמכפלתם מתחלקת בכל הראשוניים שקטנים או שווים ל-$2n+1$ אבל באף ראשוני אחר.

3. הוכיחו שקיימים אינסוף זוגות שלמים (a,b) עבורם $2<a<b$, ובנוסף a,b זרים, כך ש-$b|a^2-2$ ו- $a|b^2-4$.

4. א. האם קיימים x,y שלמים עבורם $2010x^2-2009y^2=50$?

ב. האם קיימים x,y שלמים עבורם $19x^3-17y^3=50$?

5. האם קיימת סדרה אינסופית של מספרים ראשוניים כך ש- $\forall k\ ,\ |p_{k+1}-2p_k|=1$.

6. מצאו את כל זוגות השלמים החיוביים a,b עבורם $a^b+b^a+1=3ab$.

7. מצאו את כל שלשות השלמים החיוביים x,y,z עבורם
$(3x+1)(3y+1)(3z+1)=34xyz$.

8. האם קיים מספר ראשוני שהוא מהצורה $324+455^n$ עבור n שלם?

9. האם קיים $n>1$ שלם עבורו $6n^2+1\ ,\ 3n^2+1\ ,\ 2n^2+1$ כולם ריבועים שלמים?

10. מצאו את כל זוגות המספרים הטבעיים (a,b) עבורם

א. $(a+b^2)(b+a^2)$ הוא חזקה של 2.

ב. $(a+b^3)(b+a^3)$ הוא חזקה של 3.

11. נתונים a,b שלמים עבורם a^2+ab+b^2 מתחלק ב- $p>3$ ראשוני. הוכיחו כי $(a+b)^p-a^p-b^p$

א. מתחלק ב-p^2.

ב. מתחלק ב-p^3.

12. על הלוח רשומים 20 מחלקים של $70!$. הוכיחו שניתן למחוק חלק מהמספרים (אולי אף אחד מהם, אבל לא את כולם), כך שמכפלת כל המספרים שיישארו תהיה ריבוע שלם.

13. נתונים שני מספרים x,y טבעיים בתחום $[2,100]$. הוכיחו כי קיים n טבעי עבורו $x^{2^n}+y^{2^n}$ אינו ראשוני.

14. מצאו את כל המספרים הראשוניים מצורה $p=a^2+b^2+c^2$, עבורם $p \mid a^4+b^4+c^4$.

15. האם קיימת שלישייה של מספרים זרים בזוגות a,b,c , שגדולים מ-10^{10} עבורם $a^8+b^8+c^8$ מתחלק ב-$a^4+b^4+c^4$.

16. פתרו את המשוואה $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=y^5-1$ בשלמים.

17. נסמן $P(n)$ המחלק הראשוני הגדול ביותר של n. הוכיחו כי עבור אינסוף ערכי n מתקיים $P(n)<P(n+1)<P(n+2)$.

18. הוכיחו שאם $xy+y$, $xy+x$ הם ריבועים שלמים, אז x או y ריבוע שלם.

19. סדרה של פולינומים מוגדרת כך: $Q_0(x)=1$, $Q_1(x)=x$ ובנוסף לכל $n\geq 1$ מתקיים $Q_{n+1}(x)=xQ_n(x)+nQ_{n-1}(x)$. הוכיחו כי לכל $p>2$ ראשוני ולכל x שלם $Q_p(x)-x^p$ מתחלק ב-p .