חשבון שאריות

1. א. נתונים 7 מספרים שלמים, שסכום כל 6 מהם מתחלק ב-5. הוכיחו, שכל המספרים הנתונים מתחלקים ב-5.
ב. נתונים 11 מספרים שלמים, שסכום של כל 10 מהם מתחלק ב-5. האם בהכרח כל המספרים הנתונים מתחלקים ב-5? האם סכום של כל 5 מספרים מבין המספרים הנתונים מתחלק ב-5?

2. בהנחה ש-$a^2+9ab+b^2$ מתחלק ב-11, הוכיחו שגם a^2-b^2 מתחלק ב-11.

3. הוכיחו שאם $6n+11m$ מתחלק ב-31, אז כך גם $n+7m$.

4. הוכיחו כי $(-7)^{2^n}+6^{2^n}-1$ מתחלק ב-43 לכל n טבעי.

5*. $3n+1=a^2$, $4n+1=b^2$. הוכיחו כי n מתחלק ב-56.

6. הוכיחו כי לכל ראשוני p מתקיים $(p-1)!+1$ מתחלק ב-p.

7. הוכיחו כי לכל ראשוני p המונה של שבר $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{p-1}$ מתחלק ב-$\frac{a}{b}$ p.

בתאבון!