16/6/2014 **מחנה קיץ** י"ח בסיוון תשע"ד

קבוצת ירדן

1. במערה חיים שבעה גמדים. גמד נקרא ידידותי עם יש לו לפחות 5 חברים (חבורות של גמדים היא הדדית). כל אחד מבין שבעת הגמדים ספר את כמות החברים שיש לו מבין הגמדים האחרים וממוצע המספרים שיצאו אינו עולה על 3. כמה גמדים ידידותיים יש במערה לכל היותר?

2. הוכיחו כי $1^1+2^2+3^3+...+99^{99}+100^{100}$ מתחלק ב-40.

3. במשולש ABC המעגל החסום מבחוץ מול A משיק לצלע BC בנקודה A_1. הישר שעובר דרך A_1 ומקביל לחוצה הזווית של $\measuredangle BAC$ יסומן ℓ_a. באופן דומה מוגדרים הישרים ℓ_b,ℓ_c. הוכיחו כי הישרים ℓ_a,ℓ_b,ℓ_c נפגשים בנקודה אחת.

4. על הלוח רשומים מספרים ממשיים $a_1,a_2,...,a_{5774}$. בכל מהלך בוחרים שני מספרים a ו-b שרשומים על הלוח, מוחקים את שניהם ורושמים מספר $\frac{1+a+b-3ab}{3-a-b-ab}$. נניח שבמהלך המשחק אף פעם לא היה צריך לבצע חלוקה ב-0, ובסופו של דבר נשאר על הלוח מספר אחד. הוכיחו, שניתן לדעת את המספר הזה מראש, בלי לדעת באיזה סדר מוחקים מספרים.

בהצלחה!

16/6/2014 **מחנה קיץ** י"ח בסיוון תשע"ד

קבוצת רותם

1. יהא n חיובי שלם, ו-$a_1,a_2,...,a_{n-1}$ מספרים ממשיים. נגדיר סדרות $u_0,u_1,...,u_n$ ו-$v_0,v_1,...,v_n$ באופן אינדוקטיבי ע"י $u_0=u_1=v_0=v_1=1$ וכללי הנסיגה:

$u_{k+1}=u_k+a_ku_{k-1}$, $v_{k+1}=v_k+a_{n-k}v_{k-1}$, עבור $1\le k\le n-1$.

הוכיחו כי $u_n=v_n$.

2. בארגון סודי גדול ישנם מספר מדורים. בין חלק מהמדורים יש שיתוף פעולה. לפי הנהלים, למנכ"ל יש סמכות לבצע שני סוגי פעולות:

(א) לסגור מדור כלשהו, שמשתף פעולה עם מספר אי-זוגי של מדורים.

(ב) ליצור מדור חדש לכל מדור שכבר קיים, שישתף איתו פעולה. בנוסף, שני מדורים חדשים I' ו-J' ישתפו פעולה, אם שני המדורים הישנים I ו-J שמשתפים פעולה עם I' ו-J' בהתאמה משתפים פעולה זה עם זה. פרט לכך, אף שני מדורים נוספים לא משתפים פעולה.

הוכח שהמנכ"ל יכול להפסיק לגמרי את שיתוף הפעולה בין המדורים.

3. נתון $k\ge 2$. שתי שחקניות, אנה ובננה, משחקות ב*משחק המספרים*. בהתחלה רשום מספר שלם $n\ge k$ על הלוח. אחר כך אנה ובננה משחקות בתורות, כאשר אנה מתחילה. כל שחקנית בתורה מוחקת את המספר m שרשום על הלוח ומחליפה אותו במספר m' עבורו $k\le m'<m$ שזר ל-m. מי שלא מצליחה לעשות מהלך מפסידה.

מספר $n\ge k$ נקרא טוב אם לבננה יש אסטרטגיה מנצחת, וגרוע אחרת. נתבונן בשני מספרים $n,n'\ge k$ עבורם כל ראשוני p שקטן או שווה ל-k, מחלק את n ואת n' או שלא מחלק אף אחד מהם. הוכיחו כי n,n' שניהם טובים בו-זמנית או שניהם גרועים בו-זמנית.

בהצלחה!

17/6/2014 **מחנה קיץ** י"ט בסיוון תשע"ד

תחרות קבוצתית

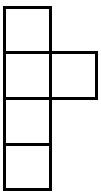
1. במשחק "ערך הצדק החברתי" משתתפים N ילדים. בהתחלה המדריך מושיב אותם במעגל ומחלק לכולם סוכריות: לראשון הוא נותן סוכרייה אחת, לשני שתי סוכריות, לשלישי 3 סוכריות וכך הלאה (לאחרון בדיוק N סוכריות). לאחר מכאן מבצעים מהלכים מהסוג הבא: מוצאים בכל שלב את הילד שיש לו הכי הרבה סוכריות (אם יש כמה כאלה, אז המדריך בוחר אחד באופן שרירותי). הילד מחפש את שני הילדים, שיש להם הכי מעט סוכריות, ונותן סוכרייה לכל אחד מהם. המשחק מפסיק רק אם לכל הילדים יש את אותו מספר סוכריות. עבור איזה N המשחק יכול להיפסק?

2. מהמרכז של מעגל שרדיוסו R העבירו שתי קרניים שהזווית בינן היא 72°. לאחר מכן בנו שולחן ביליארד בצורה של הגזרה, הקירות שלו הם שני הרדיוסים של המעגל והקשת הקצרה. מצאו את האורך המינימלי של מסלול ביליארד סגור בשולחן זה (מסלול ביליארד סגור זה כאשר בסופו של דבר הכדור עובר שוב באותה נקודה ובאותו כיוון).

3. במעגל רשומים 7 מספרים שלמים. בכל דקה, בו זמנית מוסיפים לכל מספר את המספר שנמצא לפניו נגד כיוון השעון. נניח שבהתחלה היו מספרים $a_1,a_2,...,a_7$ וכעבור 112 דקות התקבלו מספרים $b_1,b_2,...,b_7$. הראו כי b_i-a_i מתחלק ב-32 לכל i אם ורק אם $a_1+a_2+...+a_7$ מתחלק ב-32.

4. נתון הפולינום $p(x)=2x^3+4x^2-5774^{5775}x$. נסמן ב-$q(x)$ את ההרכבה שלו על עצמו 5775 פעמים. האם קיים a שלם עבורו מתקיים:

$$q(a)-p(a)=q(a+5774)-p(a+5774).$$



5. נתונים לוחות פרקט מאותו סוג שמורכבים מ-5 משבצות באותו גודל (מותר לסובב אותם, אבל אסור להפוך). עבור אילו m,n ניתן לרצף את רצפת החדר המלבני בגודל $m\times n$ משבצות בלי לחתוך את הלוחות?

6. נתון משושה **B** קמור שזוויותיו $\beta_1,...,\beta_6$ וקודקודיו $B_1,...,B_6$. בחרו בתוכו נקודה O, סימנו $OB_i=a_i$. בנוסף נתון משושה חדש **A** קמור שצלעותיו $a_1,...,a_6$ והזוית בין a_i ל-a_{i+1} שווה ל-$\angle B_iOB_{i+1}+60^\circ$.

הוכיחו כי $3S_A-2S_B\le\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\sum_{i=1}^{6}a_i^2-\sum_{i=1}^{6}a_i^2\cdot\beta_i$.

7. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות

$$f\left(x^2+y\right)+f\left(x+y^2\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)$$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$.

8. במשולש ABC שאינו שווה שוקיים אמצעי הצלעות הם A_1, B_1, C_1, חוצי הזוויות חותכים את הצלעות ב- A_2, B_2, C_2, ונקודות ההשקה של המעגלים החסומים מבחוץ לצלעות (ולא להמשכיהן) הן A_3, B_3, C_3, כאשר A_i על BC, וכך הלאה. נגדיר את A_4 להיות נקודת חיתוך הישרים B_1C_2 ו- B_2C_1 ובדומה B_4, C_4.

א. הוכיחו כי A_4, B_4, C_4 על ישר אחד.

ב. נסמן את הישר מהסעיף הקודם ב- ℓ. הוכיחו כי הישרים ℓ, AA_3, BB_3, CC_3 נפגשים בנקודה אחת.

9. במישור מצויר משולש. בכמה דרכים אפשר להעביר קטעים שיחלקו אותו ל-4 משולשים שווי שטח?

10. נתון $x+y+z=1$, $xy+xz+yz\geq -1$ (כאשר x, y, z ממשיים).
הוכיחו כי $7\left(xy+xz+yz\right)\leq 2+9xyz$.

בהצלחה!

18/6/2014 **מחנה קיץ** כ' בסיוון תשע"ד

קבוצת ירדן

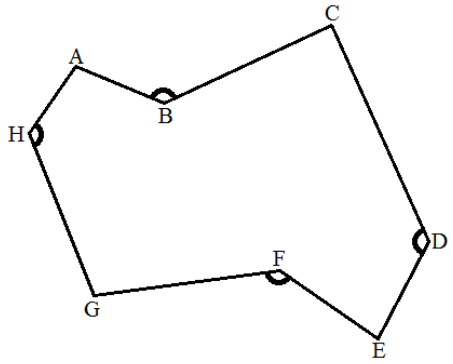
1. נתונים מספרים a,b,c המקיימים $a+b+c=0$.

חשבו את $\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^3+b^3+c^3\right)}{a^5+b^5+c^5}$ (בהנחה שהביטוי מוגדר).

2. במתומן ABCDEFGH מתקיים

$360^\circ - \measuredangle B = \measuredangle D = 360^\circ - \measuredangle F = \measuredangle H$

ובנוסף $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{CD}=\frac{EF}{FG}=\frac{AH}{GH}$. הוכיחו כי BDFH מקבילית.



3. נתון מספר מהסוג 11...1122...2233...3366...6677...7788...89 (הספרות 1, 2, 3, 6, 7 מופיעות N פעמים כל אחד, ו-8 מופיע N-1 פעמים. האם יתכן שמספר זה ראשוני?

4. נתון לוח $N\times N$ ריבועי שצבוע ב-3 צבעים. משבצות נקראות שכנות אם יש להן לפחות קודקוד אחד משותף. מהו המספר הקטן ביותר של זוגות משבצות שכנות בעלות אותו צבע?

בהצלחה!

18/6/2014 **מחנה קיץ** כ' בסיוון תשע"ד

קבוצת רותם

1. שני מעגלים α,β נמצאים בצדדים שונים של ישר AB, ומשיקים לישר זה משני צדדים בנקודות A, B בהתאמה. M היא האמצע של AB. מעגלים γ,δ משיקים מבחוץ גם ל-α וגם ל-β ועוברים שניהם דרך M, ודרך נקודה נוספת N. הוכיחו כי הישר שעובר דרך M והמרכז של α משיק למעגל MBN.

2. נתון מספר מהסוג 89...7788...6677...3366...2233...1122...11 (הספרות 1, 2, 3, 6, 7 מופיעות N פעמים כל אחד, ו-8 מופיע N-1 פעמים. האם יתכן שמספר זה ראשוני?

3. מהו השטח המרבי של מחומש, שיש לו צלע באורך $\sqrt{3}$ וכל הצלעות האחרות הן באורך 1?

4. נתון לוח $N\times N$ ריבועי שצבוע ב-3 צבעים. משבצות נקראות שכנות אם יש להן לפחות קודקוד אחד משותף. מהו המספר הקטן ביותר של זוגות משבצות שכנות בעלות אותו צבע?

בהצלחה!

25/6/2014 **מחנה קיץ** כ"ז בסיוון תשע"ד

קבוצת ירדן

1. נתון מצולע בעל 150 צלעות שחסום במעגל. ידוע שלכל צלע במצולע, האורך שווה ל-1 או ל-3. נתון בנוסף שההיקף של המצולע לא מתחלק ב-4. הוכח שקיים אלכסון במצולע, שמחלק אותו לשני חלקים בעלי שטחים שווים והיקפים שווים.

2. יהיו $a,b,c>0$. הוכיחו כי

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq 8\left(\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+3a}\right).$$

3. יהא $ABCD$ ריבוע, ותהא P נקודה בתוך הריבוע ו-Q מחוץ לריבוע כך שהקרניים AQ,CQ הן מחוץ לריבוע. בנוסף מתקיים $\measuredangle BAQ=\measuredangle PCD$, $\measuredangle BCQ=\measuredangle PAI$. הוכיחו כי PQ מאונך ל-AC.

4. נתונה חפיסה של 8 קלפים. על כל קלף כתוב מספר שלם. הוכח שניתן לחלק חלק מהקלפים ליוסי ודנה כך שכל אחד מהם יקבל אותו מספר קלפים, וההפרש בין סכום מספרי הקלפים של יוסי לבין סכום מספרי הקלפים של דנה מתחלק ב-67.

בהצלחה!

כ"ז בסיוון תשע"ד **מחנה קיץ** 25/6/2014

קבוצת רותם

1. הוכיחו כי בכל קבוצה של 2000 מספרים ממשיים שונים בזוגות ניתן למצוא שני זוגות $a>b$ ו- $c>d$, עבורם $a\neq c$ או $b\neq d$, המקיימים $\left|\frac{a-b}{c-d}-1\right|<\frac{1}{100000}$.

2. האם קיימת סדרה אינסופית של ספרות לא אפסיות $a_1,a_2,a_3,...$ ומספר טבעי N, כך שלכל $k>N$ שלם המספר $\overline{a_k...a_2a_1}$ הוא ריבוע שלם?

3. נתון משולש ABC בו $\measuredangle B<\measuredangle C$. נקודות שונות P, Q על הישר AC מקיימות $\measuredangle PBA=\measuredangle QBA=\measuredangle ACB$, ו- A נמצאת בין P ל- C. נקודה פנימית D של הקטע BQ מקיימת $PD=PB$. הקרן AD חותכת את המעגל החוסם של ABC בנקודה R ששונה מ- A. הוכיחו כי $QB=QR$.

בהצלחה!