7/4/2014 **מחנה פסח** ז' בניסן תשע"ד

קבוצת ירדן

1. נתון מרובע ABCD. חוצי הזוויות הפנימיים של זוויות B ו-D נפגשים ב-I, וחוצי הזוויות החיצוניים של B ושל D נפגשים ב-J. נסמן ב-K את האמצע של IJ.
הוכיחו כי DK = BK.

2. מצאו את כל השלשות (a,b,c) של מספרים שלמים חיוביים עבורם המספר $(a+1)(b+1)(c+1)$ מתחלק ב-abc.

3. בכיתה לומדים N תלמידים, ולכולם יש בעיות קשב וריכוז. כל דקה המורה שלהם מתעצבנת וצועקת על שני ילדים שיתחלפו במקומות. במהלך שיעור כלשהו היא צעקה על כל זוג ילדים פעם אחת בדיוק. עבור סידור התחלתי כלשהו, בכמה סידורים שונים יכולים הילדים לשבת בסוף השיעור? (התשובה יכולה להיות תלויה ב-N).

4. הוכיחו כי לכל a,b,c ממשיים מתקיים
$\left(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b\right)^2 \geq 4(ab+bc+ca)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$.

בהצלחה!

7/4/2014 **מחנה פסח** ז' בניסן תשע"ד

קבוצת רותם

1. בכיתה לומדים N תלמידים, ולכולם יש בעיות קשב וריכוז. כל דקה המורה שלהם מתעצבנת וצועקת על שני ילדים שיתחלפו במקומות. במהלך שיעור כלשהו היא צעקה על כל זוג ילדים פעם אחת בדיוק. עבור סידור התחלתי כלשהו, בכמה סידורים שונים יכולים הילדים לשבת בסוף השיעור?

2. במרחב נבחרו 6 נקודות שונות A, B, C, K, L, M (לא כולן על מישור אחד, ואף 3 לא על ישר אחד). הסתבר כי הישר AL חותך את הישר BK בנקודה שנסמן ב-P, כמו כן AM חותך את CK בנקודה Q, ובנוסף BM חותך את CL בנקודה R. הוכיחו כי למישורים ABC, KLM, PQR יש ישר משותף או ששלושתם מקבילים.

3. הוכיחו כי לכל a,b,c ממשיים מתקיים

$$\left(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b\right)^2 \geq 4\left(ab+bc+ca\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right).$$

בהצלחה!

8/4/2014 **מחנה פסח** ח' בניסן תשע"ד

קרב מתמטי

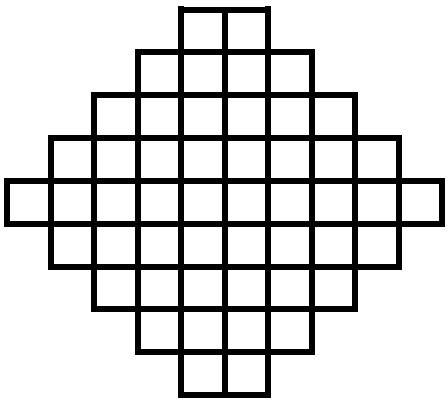
1. בעשרימון משוכלל נצבעו 4 פאות ללא קודקודים משותפים. הוכח כי סכום מרחקים מכל נקודה בעשרימון למישורי הפאות הצבועות אותו דבר.

2. ארגון טרור בינלאומי החליט לפוצץ אחד מבין 100 היעדים המרכזיים בארצות הברית. ה-FBI מסוגל לאבטח רק 3 יעדים. למרבה המזל, ה-FBI הצליחו גם לתפוס מספר מחבלים שיודעים איזה יעד יפוצץ. ב-FBI יש שיטת חקירה מתקדמת. בשיטה זו אפשר לשאול את המחבל שתי שאלות של כן\לא, המחבל יאלץ לענות על שתיהן, ולפחות אחת משתי התשובות שלו תהיה נכונה. אחרי התחקיר בשיטת FBI המחבל יהפוך ללא שימושי. מהי הכמות הקטנה ביותר של מחבלים שצריך לתחקר?

3. הוכיחו כי

$$\cos 9^\circ + \sin 9^\circ + \cos 27^\circ - \sin 27^\circ = \cos^3 9^\circ + \sin^3 9^\circ + \cos^3 27^\circ - \sin^3 27^\circ .$$

4. הריבועים ABCD, KLMN מכוונים שניהם נגד כיוון השעון (לאו דווקא מקבילים). הישרים AK ו-BL נפגשים בנקודה P, הישרים BL ו-CM בנקודה Q, הישרים CM ו-DN בנקודה R, והישרים DN ו-KA בנקודה T. הוכיחו ש-8 המעגלים PAB, PKL, QBC, QLM, RCD, RMN, TDA, TNK נפגשים בנקודה אחת.



5. טבלה מעוינית מהסוג שמוצג בציור, אבל בגודל כלשהו, מרוצפת באבני דומינו כך שנשארו שתי משבצות ריקות בלבד. מהי הכמות המרבית של אבני הדומינו האנכיות?

6. נסמן ב-a,b,c את הצלעות של משולש, m_a, m_b, m_c התיכונים המתאימים. הוכיחו:

$$\left(bc-a^2\right)m_a+\left(ac-b^2\right)m_b+\left(ab-c^2\right)m_c\geq 0$$

7. נתון ריבוע $n\times n$ של משבצות לבנות מוקף במשבצות שחורות. בכל מהלך בוחרים רצף של משבצות לבנות בשורה אחת או בעמודה אחת, בין משבצות שחורות, וצובעים את כל המשבצות ברצף זה בשחור. מהו המספר המהלכים המקסימלי שאפשר לעשות?

8. מה ההיקף המינימלי של מצולע קמור בעל 40 קודקודים, שכל קודקודיו נמצאים בנקודות ששתי הקואורדינאטות שלהן שלמות?

9. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}$ המקיימות $f\left(\frac{f(x)+a}{b}\right)=f\left(\frac{x+a}{b}\right)$,
לכל $x\in\mathbb{Q}$, $a\in\mathbb{Z}$, ו-$b\in\mathbb{Z}_{>0}$ (כאשר $\mathbb{Z}_{>0}$ היא קבוצת שלמים חיוביים).

10. דליה וצבי משחקים במשחק המצובע על הישר הממשי. לדליה יש דלי של דיו עם ארבעה ליטר דיו שחור. p ליטרים של דיו מספיקים כדי להשחיר קטע סגור באורך p.
בכל סיבוב דליה בוחרת שלם חיובי m, ומקצה $\frac{1}{2^m}$ ליטר דיו מהדלי. צבי בוחר שלם חיובי k, ומשחיר את הקטע $\left[\frac{k}{2^m},\frac{k+1}{2^m}\right]$ (שאולי חלק ממנו היה מושחר כבר קודם).
המטרה של דליה היא להגיע למצב שהדלי ריק והקטע $[0,1]$ עוד לא לגמרי שחור. האם יש אסטרטגיה שבעזרתה דליה תוכל לנצח במספר סופי של מהלכים?

בהצלחה!

9/4/2014 **מחנה פסח** ט' בניסן תשע"ד

קבוצת ירדן

1. לב מצייר על הלוח משולש חד זוויות. גל אומר שהמשולש הזה הוא **כמעט שווה שוקיים**, אם יש למשולש שני קודקודים שונים, עבורם הערך המוחלט של הפרש הזוויות בהם קטן מ-ε. עבור אילו ערכים של ε יש ללב סיכוי לצייר משולש שאינו כמעט שווה שוקיים?

2. נתונה קבוצה של 100 אנשים; חלק מזוגות האנשים הם חברים וחלק לא. רשימה של 4 אנשים (שכולם שונים) נקראת מסודרת בשני מקרים:
(1) הראשון חבר של השני, השני חבר של השלישי, והשלישי חבר של הרביעי.
(2) הראשון אינו חבר של השני, השני לא חבר של השלישי, והשלישי לא חבר של הרביעי.
הוכיחו שכמות הרשימות המסודרות האפשריות מתחלקת ב-4.

3. בטי יצרה סדרת מספרים באופן הבא: היא בחרה מספר שלם חיובי a_0, ולאחר מכן הגדירה $a_{n+1} = a_n^2 + 1$. בטי גילתה שאם היא כותבת את איברי הסדרה בבסיס 2, ומסתכלת רק על 100 הספרות האחרונות שלהם, הסדרה יוצאת מחזורית. מצאו את אורך המחזור.

4. נתון משולש ABC. חוצה הזווית הפנימי מ-A חותך את הצלע BC ב-K ואת הקשת BC של המעגל החוסם ב-M. יהא I_b מרכז המעגל שמשיק לצלע AC ולהמשכי הצלעות AB, BC. בדומה, יהא I_c מרכז המעגל שמשיק לצלע AB ולהמשכי שתי הצלעות האחרות. הוכיחו כי הישרים MI_c, KI_b מאונכים.

בהצלחה!

ט' בניסן תשע"ד **מחנה פסח** 9/4/2014

קבוצת רותם

1. תהא $\mathbb{Z}_{>0}$ קבוצת השלמים החיוביים. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$ המקיימות $m^2+f(n)\mid m\cdot f(m)+n$ לכל $m,n\in\mathbb{Z}_{>0}$.

2. AD ו-BE הם חוצי זוויות במשולש ABC (כאשר D,E נמצאות על הצלעות המתאימות). בנוסף נתון מעוין שכל קודקודיו נמצאים על צלעות המרובע $AEDB$: כל קודקוד על צלע נפרדת. תהא φ זווית לא קהה של המעוין.
הוכיחו כי $\varphi\le\max(\sphericalangle BAC,\sphericalangle ABC)$.

3. יהא r שלם חיובי, ותהא $a_0,a_1,a_2,\ldots$ סדרה אינסופית של מספרים ממשיים. נניח כי לכל שלמים אי-שליליים m ו-s קיים שלם חיובי $n\in[m+1,m+r]$, עבורו
$$a_m+a_{m+1}+\ldots+a_{m+s}=a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+s}.$$
הוכיחו כי הסדרה מחזורית, כלומר קיים $p\ge1$ עבורו $a_{n+p}=a_n$ לכל $n\ge0$.

בהצלחה!