התאמות

1. בשורה נמצאות 100 נורות כבויות וליד כל נורה כפתור שמשנה את המצב שלה (דלוק/כבוי). בדקה הראשונה לוחצים על כל הכפתורים, בדקה השנייה על כל כפתור שני, בדקה השלישית על כל כפתור שלישי וכך הלאה, בדקה ה-100 רק על כפתור האחרון (כי מספרו מתחלק ב-100). כמה נורות יהיו דולקות בסוף?

2. בחדר נמצאים שני שולחנות: על אחד מהם נמצאת כמות כלשהי של דיסקים, שצדם האחד שחור וצדם השני לבן. ראשון נכנס דני, כשהאור דולק, וסופר כמה מהם עם הצד הלבן למעלה, וכמה עם הצד השחור. אחרי זה מכבים את האור, ויוסי נכנס. הוא הופך כמה דיסקים שהוא רוצה ומעביר כמה שהוא רוצה לשולחן השני (בלי לראות). האם תמיד הוא יכול לדאוג שמספר הדיסקים עם הצד הלבן למעלה בשני השולחנות יהיה שווה?

3. רגע בזמן נקרא אופטימי, אם בהליכה עם כיוון השעון ממחוג השעות למחוג הדקות לא פוגשים את מחוג השניות, ופסימי אחרת. מה הסיכוי שרגע אקראי נתון יהיה אופטימי? מדובר בשעון מתמטי מושלם, שמחוגיו זזים ברציפות.

4. יוסי בוחר באופן אקראי מספר מ-1 עד 10 (לכל מספר אותו סיכוי), ויעל בוחרת באופן אקראי מספר מ-1 עד 11 (גם לכל מספר אותו סיכוי). מה הסיכוי שהמספר של יוסי קטן מהמספר של יעל?

5. בקבוצה 100 איברים. הוכיחו שיש אותה כמות של תתי-קבוצות בגודל זוגי ושל תתי-קבוצת בגודל אי-זוגי.

6. יעל ויוסי מסמנים משבצות ריקות בלוח אינסופי לפי בתור: יעל ב-X, יוסי ב-O. מי שיוצר רצף של 5 במאונך או במאוזן, מנצח. למי יש אסטרטגיה מנצחת?

7. נתון פרש ולוח שח ריק. יעל מניחה את הפרש על אחת המשבצות של הלוח, אחר-כך יוסי עושה מהלך עם הפרש, אחר כך יעל עושה מהלך עם הפרש וכן הלאה. מי שמעביר את הפרש למשבצת שהוא כבר היה בה, מפסיד. למי יש אסטרטגיה מנצחת במשחק זה?

8. נתבונן בתמורות של N מספרים. כל תמורה כידוע מתחלקת למספר מעגלים. שיא של תמורה הוא מספר, הגדול מכל המספרים הקודמים לו. למשל התמורה 2431657 מורכבת מ-4 מעגלים $(7)(56)(3)(241)$, ויש בה 4 שיאים: 2, 4, 6, 7.

הוכיחו כי כמות התמורות של N מספרים עם K מעגלים שווה לכמות התמורות של N מספרים עם K שיאים.

9. במחנה אימונים של האולימפיאדה לפיסיקה $2n$ מתחרים. עושים מעבדה בזוגות. כמה מעבדות ניתן לארגן, כך שאף שניים לא יעשו ביחד שתי מעבדות?

10*. איה ובני יוצאים לטיול בארכיפלג 2009 האיים (אזור בתוך הים שמורכב מ-2009 איים). איים מסוימים מחוברים במסלולי סירות דו-כיווניים. איה ובני משחקים משחק בזמן הטיול: איה בוחרת את האי הראשון בו יעגנו. כעת, כל אחד בתורו בוחר מהו האי הבא אליו הם מפליגים, מבין האיים בהם עוד לא ביקרו, כאשר בני מתחיל. שחקן שאין לו מהלך חוקי, מפסיד. הוכיחו כי איה תמיד יכולה לנצח.

11. חשב/י את כמות המספרים השלמים החיוביים אשר קטנים מ-1,000,000, מתחלקים ב-7, וברישומם העשרוני אין שימוש בספרות שאינן 0, 1 או 9.

12*. בשורה N מקומות חנייה. בכניסה כל רכב מקבל פתק עם מספר המקום שבו הוא אמור לחנות. המכונה שמחלקת פתקים מגרילה כל פעם מספר מ-1 עד N עם סיכויים שווים, בלי קשר לפתקים הקודמים (יתכן ששני רכבים יקבלו אותו מספר). כל רכב מגיע למקום המיועד לו לפי הפתק, ומנסה לחנות שם; אם המקום תפוס, אז הוא מתקדם למקום הבא ומנסה לחנות בו, וכך הלאה. אם רכב מסוים מגיע למקום N ולא מצליח לחנות שם, הוא יוצא מהחניון. מה הסיכוי לכך, ש-K רכבים יגיעו לחניון ריק וכולם יצליחו לחנות?

מתאמות