אי-שוויונים לא הומוגניים

מחנה חנוכה, רותם, תשע''ד

1. יהיו a,b,c מספרים אי-שליליים. הוכיחו כי

$$\sqrt{a(b+1)}+\sqrt{b(c+1)}+\sqrt{c(a+1)}\le\frac{3}{2}\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}.$$

2. עבור כל a,b,c ממשיים הוכיחו כי

$$\sqrt{a^2-a+1}+\sqrt{b^2-b+1}+\sqrt{c^2-c+1}\ge\sqrt{a^2+b^2+c^2+a+b+c+3}.$$

3. יהיו a,b,c מספרים אי-שליליים. הוכיחו כי

א. $\sqrt[3]{(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)}+abc\ge ab+bc+ca.$

ב. $\sqrt[3]{4(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)}\ge ab+bc+ca.$

ג. $3\cdot\sqrt[3]{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}\ge 4\cdot\sqrt[4]{ab+bc+ca}$

4. יהיו a,b,c מספרים אי-שליליים. הוכיחו כי

$$\frac{x}{xy+x+1}+\frac{y}{yz+y+1}+\frac{z}{zx+x+1}\le 1.$$

5. יהיו $\{a,b,c\}\subset\left[\frac{1}{2},1\right]$. הוכיחו כי $2\le\frac{a+b}{1+c}+\frac{a+c}{1+b}+\frac{b+c}{1+a}\le 3$.

6. יהיו x ו-y מספרים חיוביים שונים. מצאו את הערך המינימאלי האפשרי של הביטוי

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{16}{xy}+6(x+y).$$

7. בהינתן $x\ge 2$, $y\ge 2$ ו-$z\ge 2$ הוכיחו כי

א. $(x^3+y)(y^3+z)(z^3+x)\ge 125xyz.$

ב. $8(x^3+y)(y^3+z)(z^3+x)\ge 125x^2y^2z^2.$