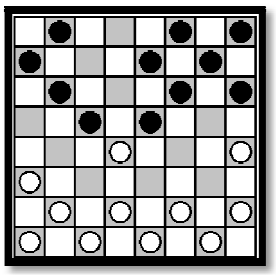
כ"ט בכסלו תשע"ד **מחנה חנוכה** 2/12/2013

קבוצת ירדן

1. מצא\י את כל הזוגות (x,y) של מספרים ממשיים המקיימים:

$$\begin{cases} x^3+y^3+x^2y+y^2x=65 \\ x^2+x+y^2+y=18 \end{cases}.$$



2. במהלך משחק דמקה חייל לבן אכל חייל שחור ונאכל מיד לאחר מכן. אחרי זמן מסוים הגיעו למצב שמתואר בתרשים. של מי התור?

3. במשולש שאינו שווה שוקיים מרכז המעגל החסום, מרכז המעגל החוסם, ונקודת מפגש הגבהים נמצאים על מעגל שעובר בנוסף דרך אחד הקודקודים של המשולש. הוכיחו, שמעגל זה עובר בעצם דרך שני קודקודים של המשולש.

4. הוכיחו כי אם המספרים הטבעיים a,b,c,d,e,k,ℓ,m,n,s מקיימים

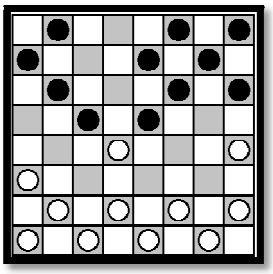
$$a^{k^8-k^4}+b^{\ell^8-\ell^4}+c^{m^8-m^4}+d^{n^8-n^4}=e^{s^8-s^4},$$

אזי בין המספרים a,b,c,d יש לפחות אחד שמתחלק ב-2255.

בהצלחה!

כ"ט בכסלו תשע"ד **מחנה חנוכה** 2/12/2013

קבוצת רותם



1. במהלך משחק דמקה חייל לבן אכל חייל שחור ונאכל מיד לאחר מכן. אחרי זמן מסוים הגיעו למצב שמתואר בתרשים. של מי התור?

2. הוכיחו כי אם המספרים הטבעיים a,b,c,d,e,k,ℓ,m,n,s מקיימים
$a^{k^8-k^4}+b^{\ell^8-\ell^4}+c^{m^8-m^4}+d^{n^8-n^4}=e^{s^8-s^4}$,
אזי בין המספרים a,b,c,d יש לפחות אחד שמתחלק ב-2255.

3. נתונה תיבה $ABCDA_1B_1C_1D_1$ במרחב תלת-מימדי (כלומר $ABCD$ ו-$A_1B_1C_1D_1$ מלבנים, והקטעים AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 מקבילים, שווים באורכם ומאונכים למישורי המלבנים). יהיה μ המקום הגיאומטרי של נקודות שנמצאות במרחק שווה מהישרים AB_1 ו-CD_1. הוכיחו כי כל מישור שמקביל ל-$ABCD$ מכיל ישר שכולו נמצא ב-μ.

4. יהיו a,b,c,d מספרים חיוביים, המקיימים $a^2+b^2+c^2+d^2=4$.

הוכח/י כי $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\le 2+\frac{2}{abcd}$.

בהצלחה!

1. חשבו את $\frac{1-\sqrt{5}+2}{1+\sqrt{5}-2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{9}+2}{\sqrt{5}+\sqrt{9}-2}+...+\frac{\sqrt{77}-\sqrt{81}+2}{\sqrt{77}+\sqrt{81}-2}$.

2. בפירמידה משולשת PABC, הזוויות $\sphericalangle PAB=\sphericalangle PBC=\sphericalangle PCA$, והבסיס ABC הוא משולש משוכלל. הוכיחו כי $PA=PB=PC$.

3. a הוא מספר טבעי, עבורו a^3-a לא מתחלק ב-12, ו-a^7-a לא מתחלק ב-63. הוכיחו כי a^2-36 מתחלק ב-864.

4. חשבו את $\arctan\left(\cot 13^\circ\cdot\cot 23^\circ\cdot\tan 31^\circ\cdot\tan 35^\circ\cdot\tan 41^\circ\right)$ (במעלות).

5. נתון מצולע (קו שבור סגור שלא חותך את עצמו) שאף 3 קודקודים שלו לא נמצאים על ישר אחד. זוג צלעות נקרא מוזר, אם ההמשך של אחת הצלעות חותך את הצלע השניה. הוכיחו כי יש בסה"כ מספר זוגי של זוגות צלעות מוזרים.

6. לכל מספר טבעי N נסמן ב-$\sigma(N)$ את סכום הספרות של N ברישום העשרוני. מצאו את הערך הגדול ביותר האפשרי של $\frac{\sigma(N)}{\sigma(8N)}$.

7. בתחנת צומת בית ליד (השרון) עוברים 7 קווי אוטובוס של אגד. האם הסדרן הראשי של אגד יכול לקבוע לו"ז, כך שיתקיימו כל התנאים הבאים:

(א) כל קו מגיע במרווחים קבועים של זמן.

(ב) אף פעם לא מגיעים בו-זמנית שני אוטובוסים.

(ג) אם מגיעים לתחנה בו-זמנית 7 אנשים שכל אחד מהם זקוק לקו אחר, וכל אחד עולה על האוטובוס שלו ברגע שהוא מגיע, אז ניתן לבחור את רגע ההגעה של האנשים כך שסדר העליה שלהם יהיה כרצוננו.

8. במישור נתונים שניונית, ושני מעגלים בעלי מרכז משותף; השניונית חותכת את המעגל הראשון בנקודות A_1,A_2,A_3,A_4, ואת המעגל השני בנקודות B_1,B_2,B_3,B_4. הוכיחו כי מרכז הכובד של A_1,A_2,A_3,A_4 מתלכד עם מרכז הכובד של B_1,B_2,B_3,B_4.

9. על קובית יחידה n-מימדית סומנו 17 קודקודים. יהי k מספר כך שכל שני קדקודים מסומנים נבדלים לפחות ב-k קואורדינאטות. מהו הערך המקסימלי האפשרי של k/n (כאשר n לא נקבע מראש)?

10. נתון פאון תלת-ממדי קמור שלכל פאה שלו יש מרכז סימטריה. הוכיחו, שלפאון עצמו יש מרכז סימטריה.

בהצלחה!