גישה גיאומטרית לאי-שוויונים

1. הטלה אורטוגונלית מקצרת (מסקנה: קושי-שוורץ).

2. אי-שוויון המשולש.

3. הצבת Ravi: רושמים הכל ב- x, y, z. נוסחאות חשובות: ל-Ravi:

$$S = \sqrt{pxyz} = pr = xr_a = \frac{abc}{4R}\ ,\ p = x + y + z,$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{px}{bc}}\ ,\ \cos\alpha = \frac{px - yz}{px + yz}.$$

4. במשולש מול צלע גדולה יותר נמצאת זווית גדולה יותר.

5. חוצה הזווית נמצא בין הגובה לתיכון.

6. מכפלת אלכסונים גדול מפעמיים שטח המרובע.

7. אי-שוויון תלמי: $ef \le ac + bd$.

8. אם p_1, p_2, p_3, p_4 הם מכפלות הצלעות בפאות הארבעון, אז $p_1 + p_2 + p_3 \ge p_4$.

9. אי-שוויון הרון: $a^4 + b^4 + c^4 < 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$.

10. אי-שוויון איזופרמטרי.

אי-שוויונים גיאומטריים

במשולש תמיד p יסמן חצי-היקף, r רדיוס המעגל החסום, R רדיוס המעגל החוסם, a,b,c צלעות, α,β,γ זוויות ממול m_a תיכול לצלע a, h_a גובה לצלע a.

1. בכל משולש $R \geq 2r$.

2. נקודה M נמצאת בתוך משולש משוכלל ABC. באיזה תחום נמצא $\measuredangle MAB + \measuredangle MBC + \measuredangle MCA$?

3. שטיינר-למוס: מול צלע גדולה יותר חוצה זווית קטן יותר.

4. הוכיחו אי-שוויון עבור אורך התיכון במשולש: $m_a \geq \frac{b+c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

5. ABCD מרובע קמור, N אמצע BC, $\measuredangle AND = 135^\circ$. הוכיחו כי
$AB + \frac{BC}{\sqrt{2}} + CD \geq AD$.

6. הוכיחו כי $\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2} \geq \sqrt{a^2+ac+c^2}$ לכל $a,b,c \in \mathbb{R}$.

7. מצולע קמור $A_1A_2A_3...A_n$ ששטחו S חסום במעגל שרדיוסו R. נקודה B_i נמצאת על הצלע A_iA_{i+1} (ונקודה B_n על A_nA_1). נסמן ב-P את ההיקפו של $B_1B_2B_3...B_n$. הוכיחו כי $RP \geq 2S$.

8. הוכיחו כי במשולש $a\sin\frac{\alpha}{2}+b\sin\frac{\beta}{2}+c\sin\frac{\gamma}{2} \geq p$.

9. א. מצא את מספר K הקטן ביותר עבורו לכל a,b ממשיים מתקיים אי-שוויון
$\left|\left(a^2-b^2\right)ab\right| \leq K\left(a^2+b^2\right)^2$.

ב. מצא את מספר M הקטן ביותר עבורו לכל $a,b,c \in \mathbb{R}$ מתקיים אי-שוויון
$\left|ab\left(a^2-b^2\right)+bc\left(b^2-c^2\right)+ca\left(c^2-a^2\right)\right| \leq M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$.

10. מספרים $a,b,c,x,y,z \in \mathbb{R}$ מקיימים $\left(a+b+c\right)\left(x+y+z\right)=3$ ובנוסף $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=4$. הוכיחו כי $ax+by+cz \geq 0$.

11. נתונים מספרים ממשיים $x_1,x_2,...,x_n$. הוכיחו כי
$\frac{1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\frac{x_3}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}+...+\frac{x_n}{1+x_1^2+...+x_n^2} < \sqrt{n}$.

12. (סגנון ארדש-מורדל) במשולש R_A, R_B, R_C מרחקים מנקודה אקראית P לקודקודים A, B, C, המרחקים מאותה הנקודה לצלעות הם d_a, d_b, d_c, והרדיוסים של מעגלים שחוסמים את המשולשים PBC, PAC, PAB הם ρ_a, ρ_b, ρ_c. הוכיחו כי:

א. $2\left(d_a + d_b + d_c\right) \le R_A + R_B + R_C$ **ב.** $8d_a d_b d_c \le R_A R_B R_C$

ג. $\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} \le 2\left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}\right)$ **ד.** $R_A + R_B + R_C \le \rho_a + \rho_b + \rho_c$

ה. $\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \le \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c}$

13. נתון משושה קמור $ABCDEF$ בו צלעות מנוגדות מקבילות והיקפו $2p$. רדיוסים המעגלים החסומים של FAB, BCD, DEF יסומנו R_A, R_C, R_E.
הוכיחו כי $R_A + R_C + R_E \ge p$.

14. לכל $k \in [-2,2]$, ולכל $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\left(a+c\right)\left(b+d\right) \le \sqrt{a^2 + kab + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + kcd + d^2} + \\ + \sqrt{a^2 - kad + d^2} \cdot \sqrt{b^2 - kbc + c^2}$$

15. הוכח כי בכל משולש $\frac{m_a}{h_a} \le \frac{R}{2r}$.

16. בסימוני ארדש-מורדל: הוכיחו כי $R_A + R_B + R_C \ge \frac{2\left(am_a + bm_b + cm_c\right)}{a+b+c}$.

17. במשולש חד-זווית: $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \sin\alpha + \sin\beta$.

18. בכל משולש: $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \ge \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$.

19. הוכיחו כי במשולש חד-זווית $8R^2 < a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$. האם זה ממשיך להתקיים במשולש כללי.

20. במשולש רדיוס המעגל החוסם הוא R, מרכזו O ומפגש הגבהים H. מהו הערך המקסימלי האפשרי עבור $\frac{OH}{R}$?

21. במשולש חד-זווית $a+b+c \ge 4R + 2r$

22. (Pedoe) עבור שני משולשים ששטחיהם S_i וצלעותיהם a_i, b_i, c_i הוכיחו כי
$a_1^2\left(b_2^2 + c_2^2 - a_2^2\right) + b_1^2\left(a_2^2 + c_2^2 - b_2^2\right) + c_1^2\left(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2\right) \ge 16S_1S_2$.

בכל משולש חד-זווית $\sqrt{3}\max\{h_a,h_b,h_c\} \geq p$.

$$(a+b-c)^2(a+c-b)^2(b+c-a)^2 \geq (a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)$$

$$m_a + m_b + m_c \geq 4R$$

$\alpha + \beta \leq 2\gamma$ אזי $a^4 + b^4 \leq 2c^4$

מרובע ששטחו S_1 והיקפו P_1 חסום במעגל, כאשר מרכז המעגל בתוכו. דרך קודקודי המרובע מעבירים משיקים, שהן צלעות המרובע ששטחו S_2 והיקפו P_2.
הוכיחו כי $\frac{S_2}{S_1} \leq \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2$.

$ABCD$ הוא ריבוע, M על CD, ו-N על AD, כך שהקרן BN חצה את $\measuredangle ABM$. הוכיחו כי $2MN \geq BN$.

הוכיחו כי לכל 3 ווקטורים $|u|+|u|+|w|+|u+v+w| \geq |u+v|+|u+w|+|v+w|$.

$ABCD$ מרובע חסום. הוכיחו כי $|AB-CD|+|AD-BC| \geq 2\cdot|AC-BD|$

a צלע גדולה, h גובה גדולה $\frac{R}{r} \geq \frac{a}{h}$.

$$2(a^2-ab+b^2)(c^2-cd+d^2) \geq a^2c^2+b^2d^2$$

בכל משולש $m_c R \geq a^2+b^2$.

בכל משולש $\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2} \geq 1+\sqrt{\frac{r}{2R}}$.