תרגיל גיאומטרי

1. בתוך משולש ABC נלקחה נקודה K על חוצה הזווית של BAC. הישר CK פוגש שנית את המעגל Ω החוסם את ABC בנקודה M. המעגל ω שעובר דרך A ומשיק ל-CM בנקודה K פוגש שנית את הישר AB בנקודה P ואת Ω בנקודה Q. הוכיחו כי הנקודות M ,Q ,P נמצאות על ישר אחד.

2. נתונים שני מעגלים k_1, k_2 שנחתכים בנקודה Q ובעוד נקודה. נקודה P נמצאת על מעגל k_2 ובתוך מעגל k_1. נסמן ב-X את נקודת החיתוך הנוספת של PQ עם k_1. המשיק ב-X חותך את המעגל k_2 בנקודות A ו-B. הישר שמקביל ל-AB ועובר דרך P יסומן ℓ. מעגל שעובר דרך A, B ומשיק ל-ℓ יסומן k. הוכיחו כי k משיק ל-k_1.

3. משולש ABC הוא שווה שוקיים, $AB = AC$, $\measuredangle A = 20^\circ$. בוחרים נקודות D ו-E על צלעות AC ו-AB בהתאמה, כך ש-$\measuredangle BCE = 50^\circ$ ו-$\measuredangle CBD = 60^\circ$. מצאו את הזווית $\measuredangle BDE$.

4. משולש ABC הוא שווה שוקיים, $AB = BC$. נקודה D בתוך המשולש מקיימת: $\measuredangle ADC = 2\measuredangle ABC$. הראו כי פעמיים המרחק מ-D לחוצה זווית החיצוני של $\measuredangle ABC$ שווה ל-$AD + DC$.

5. נתון משולש ABC. מעגל k עובר דרך B ומשיק ל-AC ב-A. המשיק ל-k בנקודה B פוגש את AC בנקודה X, השונה מ-C. מעגל u שחוסם את BXC חותך את k בנקודות B ו-Q. המשיק למעגל u ב-X חותך את AB בנקודה Y. הוכיחו כי הישר XY משיק למעגל החוסם של BQY.

6. ABCD מרובע חוסם מעגל. הישר ℓ שעובר דרך A חותך את הקטע BC בנקודה M ואת המשך DC בנקודה N. מרכזי המעגלים החסומים של BAM, CMN ו-DAN יסומנו I_1, I_2 ו-I_3 בהתאמה. הראו כי נקודת מפגש הגבהים של $I_1I_2I_3$ נמצאת על ℓ.

7. מרובע ABCD חסום במעגל ω שמרכזו O, ואלכסוניו נפגשים ב-K. אמצעי הקשתות AB, BC, CD, DA הם M_1, M_2, M_3, M_4, ומרכזי המעגלים החסומים במשולשים KAB, KBC,KCD, KDA הם I_1, I_2, I_3, I_4.
הוכיחו כי הישרים I_1M_1, I_2M_2, I_3M_3, I_4M_4, OK נפגשים בנקודה אחת.

בהצלחה!