מחנה פברואר תשע''ד

1. בהנחה ש- $a,b,c\in\mathbb{R}$, המקיימים $a+b+c=3$ וגם $ab+bc+ca=2$, הוכיחו כי
$\max\{a,b,c\}-\min\{a,b,c\}\le 2$.

2. הוכיחו כי לכל משולש מתקיים
$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta+\cos\gamma}+\frac{\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\gamma}+\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta}\ge\frac{3}{2}.$$

3. מצאו את הערך המרבי של k עבורו אי-השוויון
$$\frac{a}{1+9bc+k(b-c)^2}+\frac{b}{1+9ac+k(a-c)^2}+\frac{c}{1+9ab+k(a-b)^2}\ge\frac{1}{2}.$$
מתקיים לכל a,b,c אי-שלילי המקיימים $a+b+c=1$.

4. יהיו a,b,c חיוביים המקיימים $a+b+c=3$.
הוכיחו כי $\frac{a^3}{2a+b^3}+\frac{b^3}{2b+c^3}+\frac{c^3}{2c+a^3}\ge 1$.

5. לכל x,y,z ממשיים המקיימים $xyz=-1$ הוכיחו כי:
$$x^4+y^4+z^4+3(x+y+z)\ge x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+z^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

6. יהיו a,b,c,d מספרים חיוביים. הוכיחו כי
$$1+4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\ge\frac{5}{1+a}+\frac{7}{1+a+b}+\frac{9}{1+a+b+c}+\frac{36}{1+a+b+c+d}.$$

7. עבור $a\ge 1$, $b\ge 1$, $c\ge 1$ הוכיחו כי $\frac{a^3+2}{b^2-b+1}+\frac{b^3+2}{c^2-c+1}+\frac{c^3+2}{c^2-c+1}\ge 9$.

8. $\{a,b,c\}\subset[0,1]$. הוכיחו כי $(a+b+c)\left(\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\right)\le 5$.

9. לכל a,b,c חיוביים הוכיחו כי $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\ge\frac{a+b+c}{a+b+c-\sqrt[3]{abc}}$.

10. יהיו a,b,c אי-שליליים המקיימים $ab+bc+ca\ne 0$. הוכיחו כי
$$\frac{a(b^4+c^4)}{a^2+bc}+\frac{b(a^4+c^4)}{b^2+ac}+\frac{c(a^4+b^4)}{c^2+ab}\ge a^3+b^3+c^3.$$